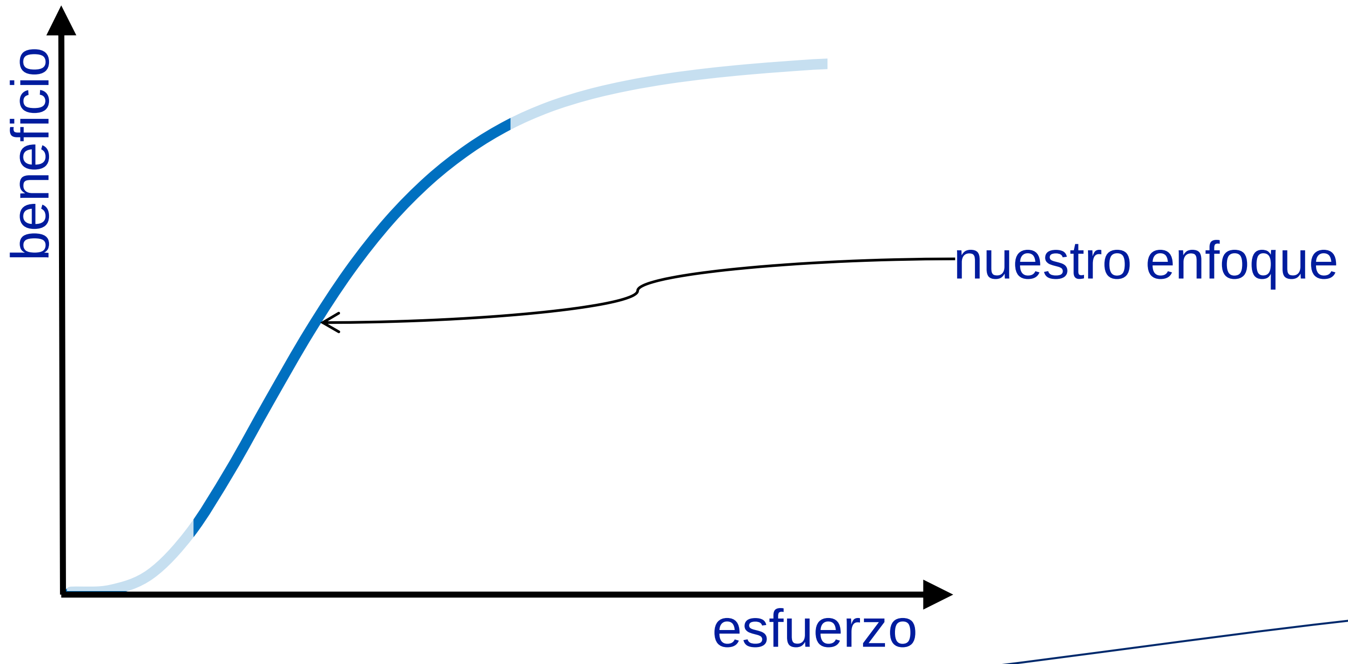
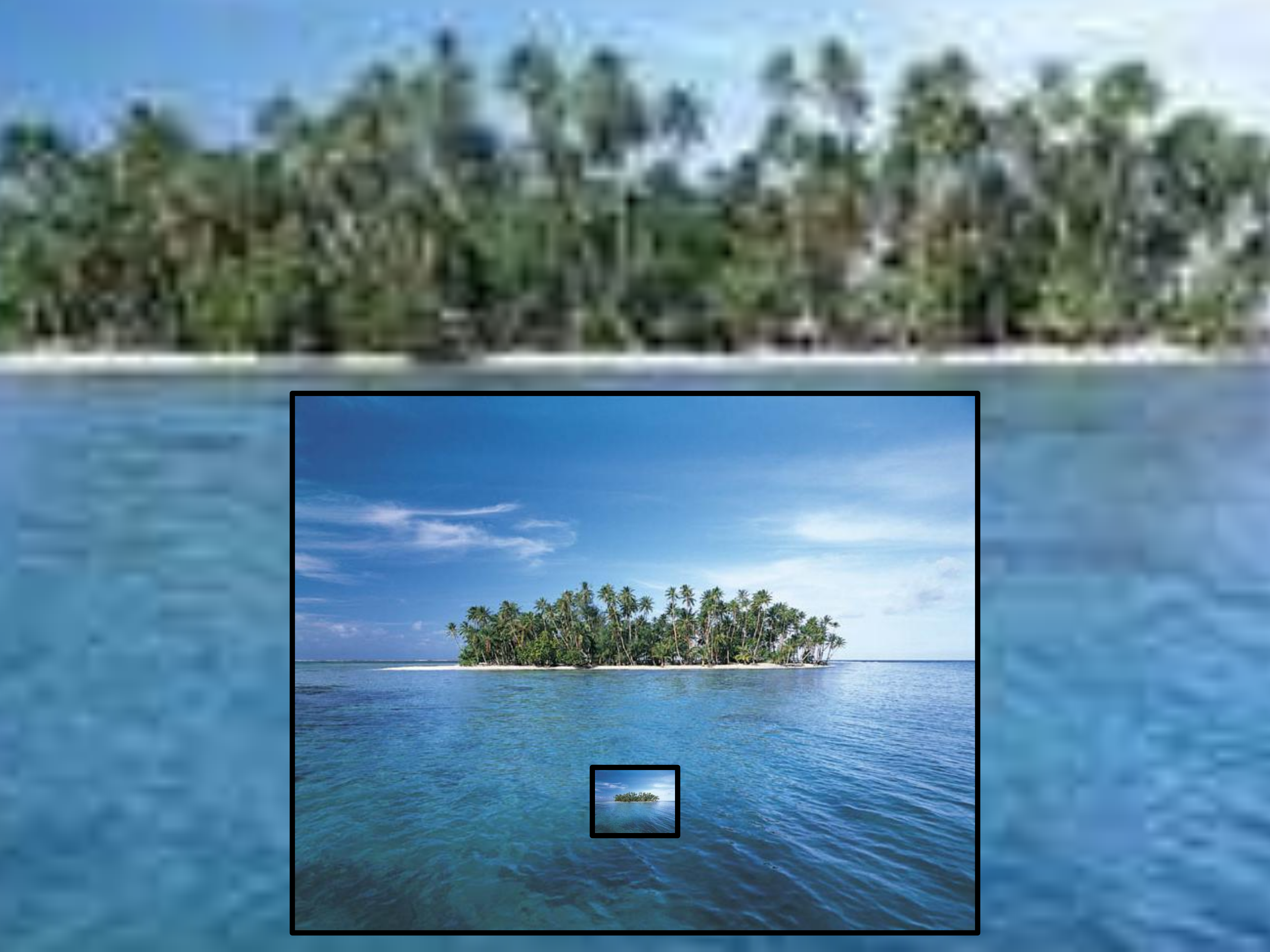
Modelos Internos de Riesgo, Capital y Solvencia

AMA 2012

Nuestro ámbito

- Ejemplos de modelación de riesgos usuales
- Construcción de un modelo en Excel
- Estudiar unos fenómenos importantes
- Hacer todo lo más sencillo posible. Pero no más.





Nuestra compañía

- Inversiones
  - Inv 1: acciones – ingreso variable
  - inv 2: acciones – ingreso variable
  - inv 3: bonos – ingreso fijo

- Líneas de negocio
  - LoB 1: daños – de masa cola larga
  - LoB 2: daños – catástrofe cola corta
  - LoB 3: daños – largos cola corta
  - LoB 4: vida – pensiones en runoff

- Reaseguro
  - LoB 1: cuota parte
  - LoB 2: stop loss
  - LoB 3: XL

Nuestro modelo

- En Excel

  - ☺ cálculos ad hoc rápidos
  - ☺ comprobar una otra herramienta
  - ☺ construir prototipos
  - ☺ compatibilidad con otros usuarios de Microsoft
  - ☺ entender como funciona un método
  - ☺ enseñar

  - ☹ usuarios múltiples
  - ☹ buen gobierno y auditoria
  - ☹ conexión a bancos de datos
  - ☹ cálculos intensivos
  - ☹ algoritmos con entrelazos

PRS_ToyInternalModel.xlsm

Vuestro curso

- Preguntas, dudas, comentarios
  - en seguida interrumpirme y decírmelo
  - corregirme
  - hacerlo interactivo
- Enfoque en
  - temas esenciales
  - aspectos prácticos
  - mis preferencias
- Fichero Excel
  - es vuestro
  - es vuestra responsabilidad

Encuestas

- ¿Cuales son los temas que os interesan?

- ¿Cual será la tasa de interés media en los próximos 5 años?

guess game
- INTEREST RATE

Agenda

- Solvencia
- RTC
- SCR
- Usos y Abusos

Principios del SST

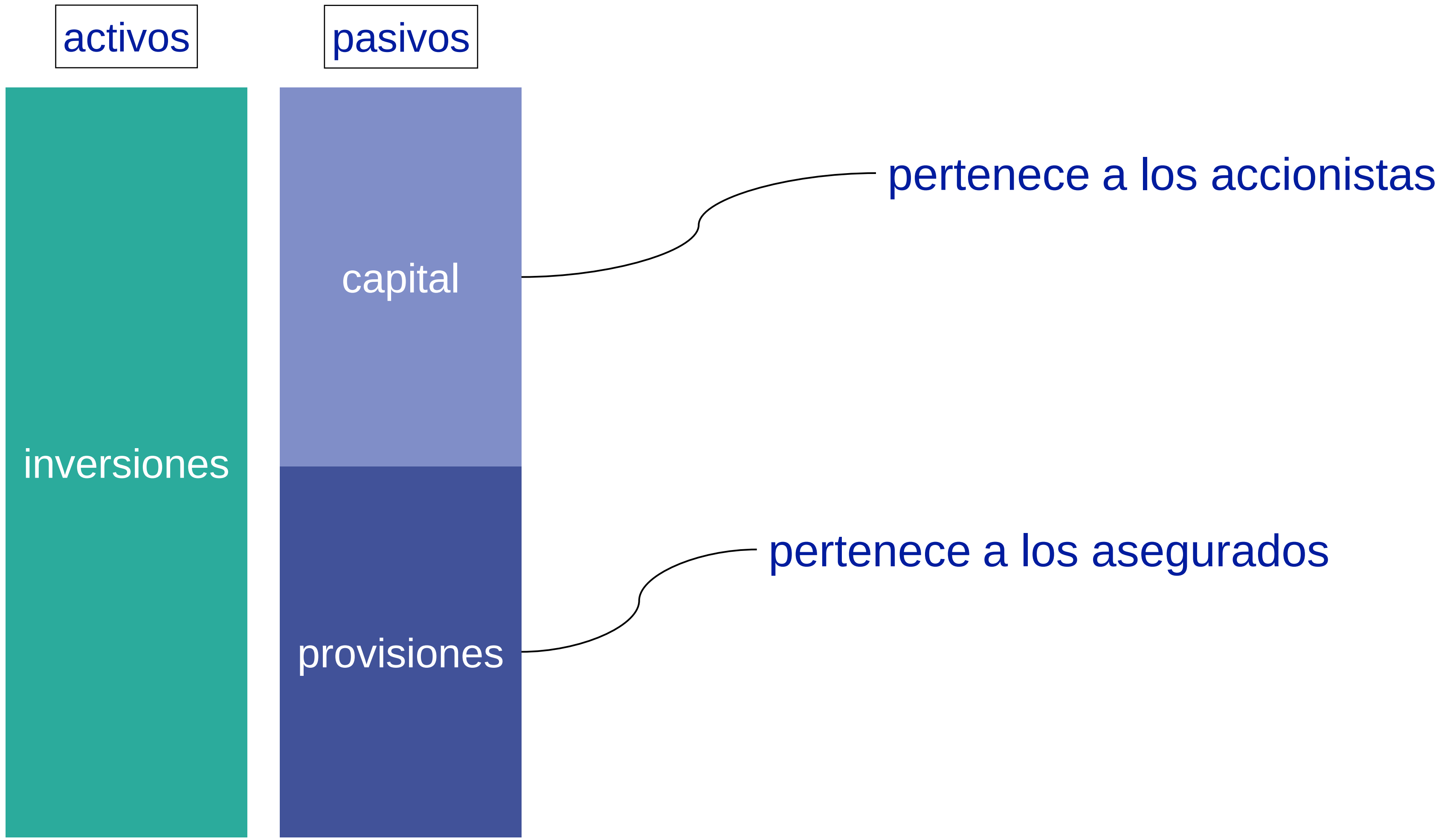
1. All assets and liabilities valued market consistently
2. Risks considered are insurance, market, credit, (operational)
3. RBC (RTC) = MCV assets – MCV liabilities
4. TC (SCR) = tVaR (99%) RBC within one year + MVM
5. MVM ~ cost of present value of future capital for the run-off
6. Capital adequacy = RBC / TC
7. Scope is legal entity and group / conglomerate level
8. Deterministic scenarios have to be aggregated within the TC calculation
9. All relevant probabilistic states have to be modeled probabilistically
10. The internal model should be used to manage the company
11. The internal model has to be integrated into the core processes within the company
12. SST report to supervisor such that a knowledgeable 3rd party can understand
13. Disclosure of internal model such that a knowledgeable 3rd party can understand
14. Management is responsible for the adherence to these principles

3 pilares

EXPERTS FOR EXPERTS

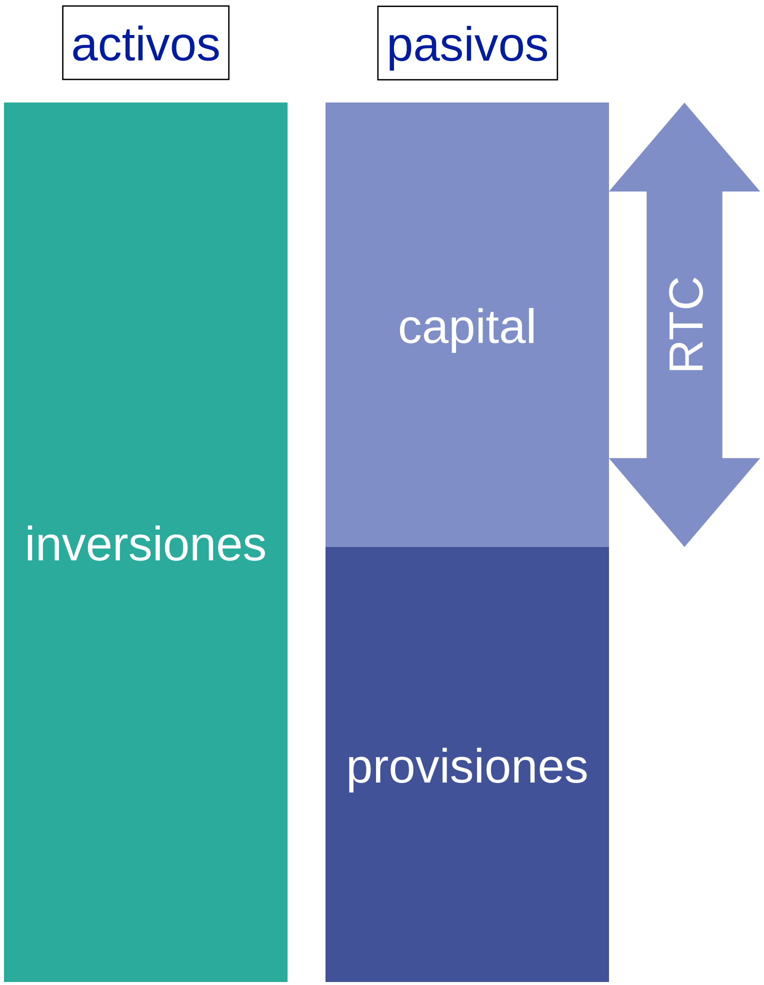
cuantitativo	cualitativo	transparencia

Balance



RTC
- LINE ITEMS

Balance económico



- RTC = activos – provisiones
  = valor económico de la compañía
  - Activos
    market consistent / mark-to-market
  - Provisiones
    mejor estimador / mark-to-model

RTC
- T=0 RTC

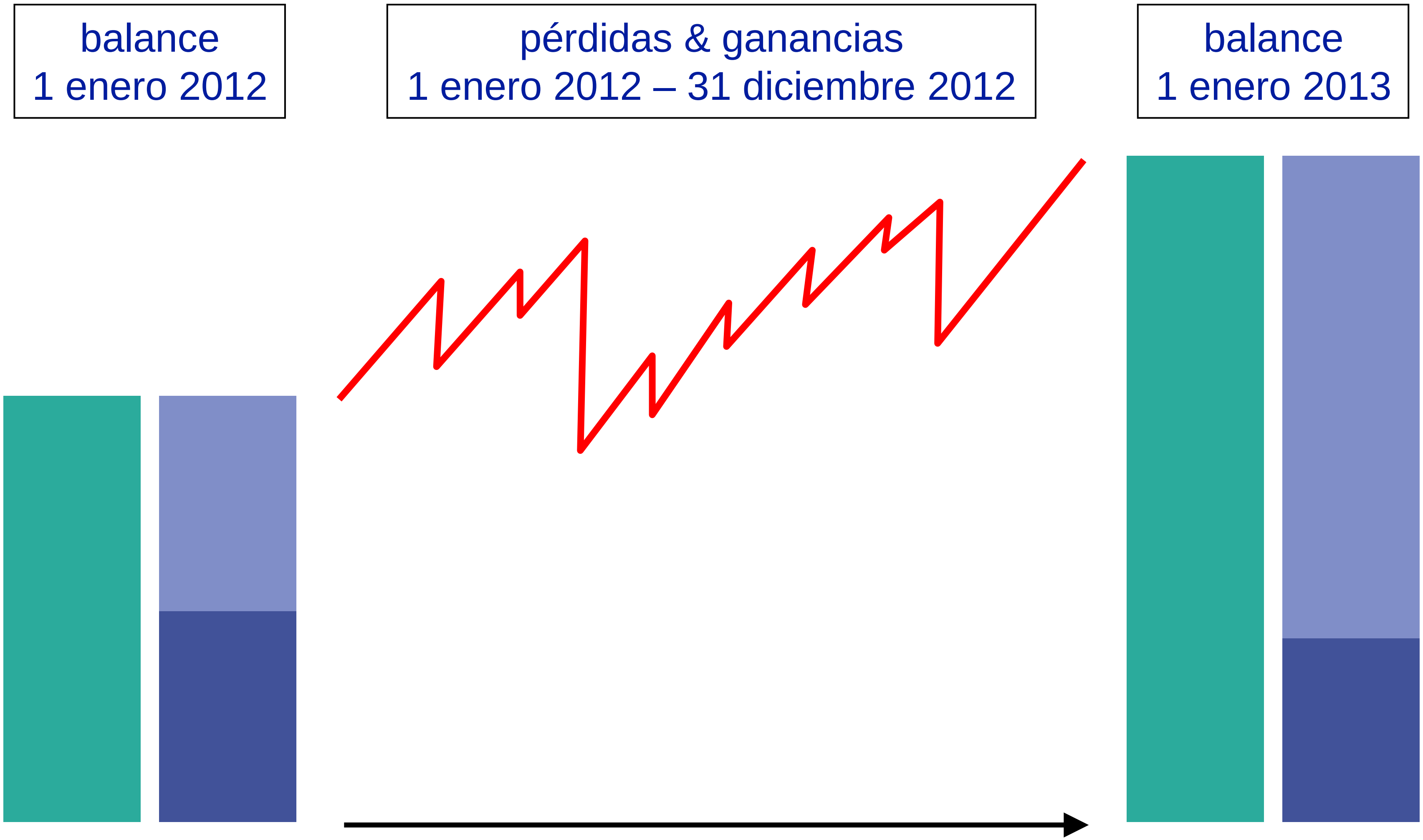
Formulas centrales

EXPERTS FOR EXPERTS

$$\boxed{RTC = \sum_k S_k}$$

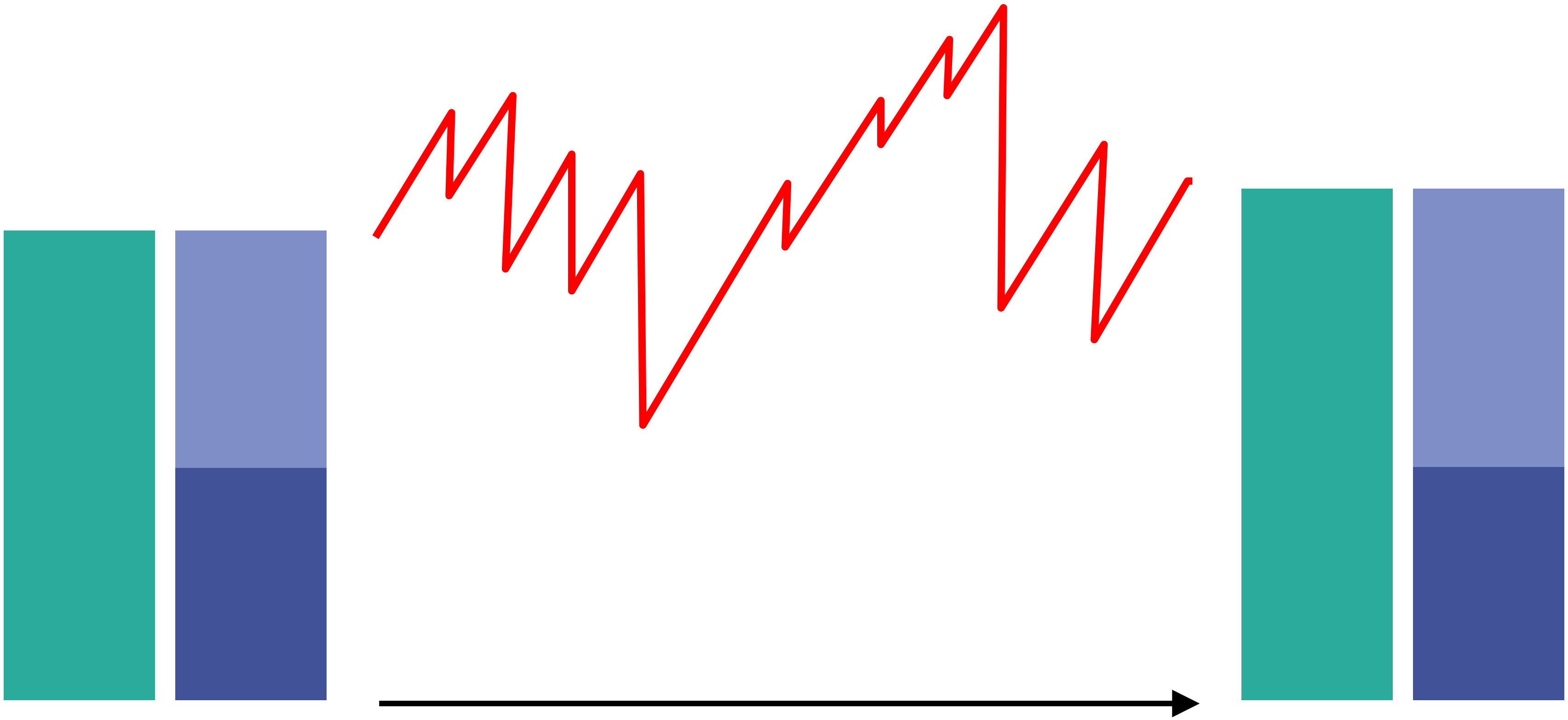
cuenta

Horizonte a 1 año



Horizonte a 1 año

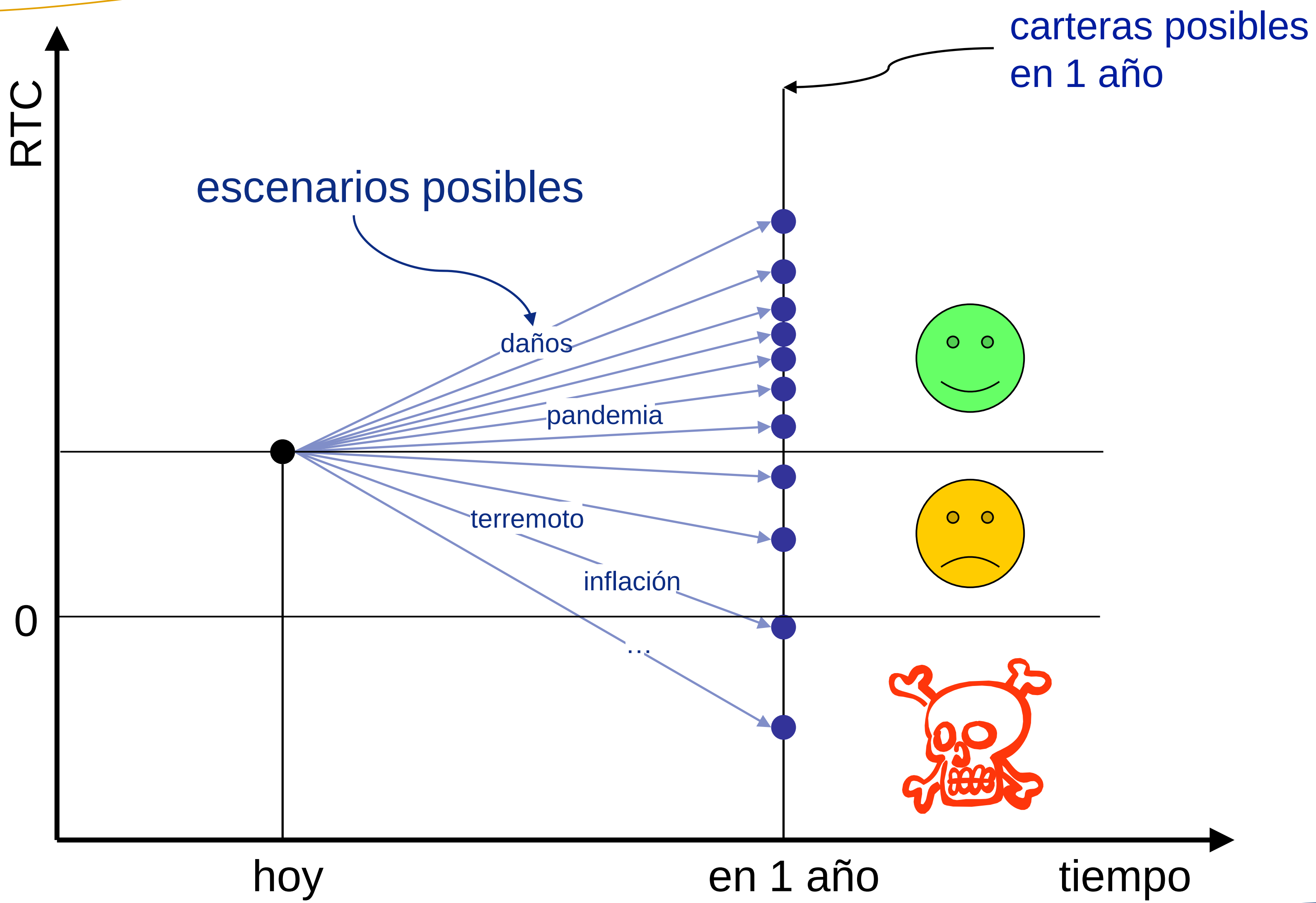
balance 1 enero 2012	pérdidas & ganancias 1 enero 2012 – 31 diciembre 2012	balance 1 enero 2013



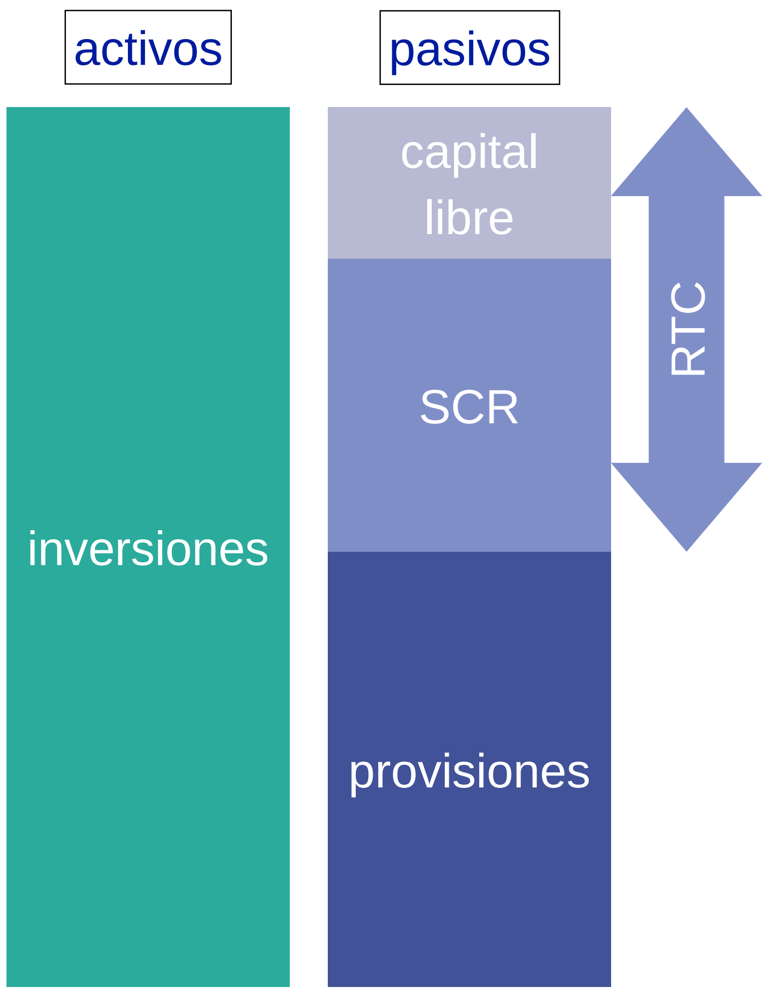
Horizonte a 1 año

balance 1 enero 2012	pérdidas & ganancias 1 enero 2012 – 31 diciembre 2012	balance 1 enero 2013

?Cuanto queda después de 1 año?



Balance económico



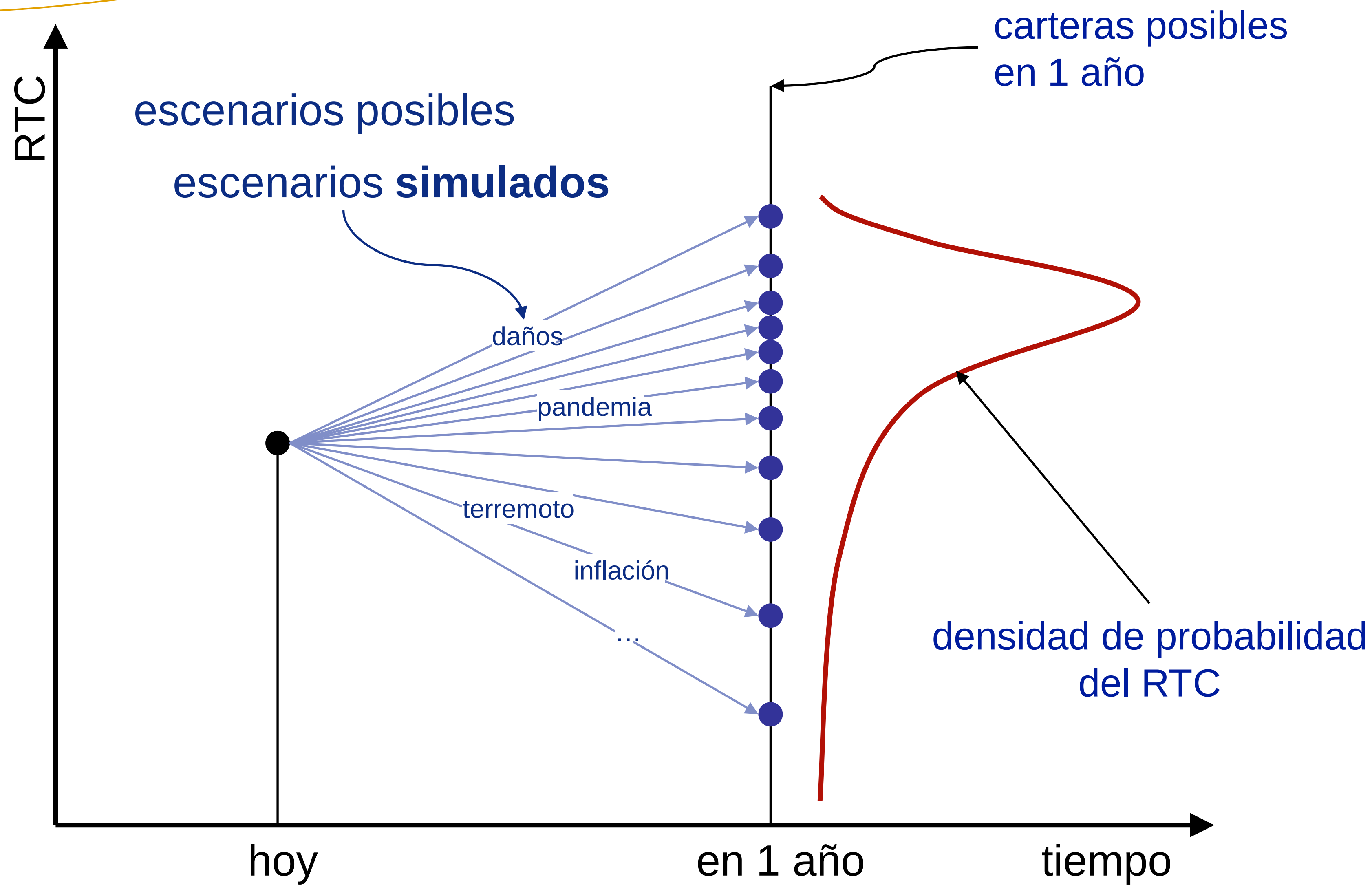
- RTC = activos – provisiones
  = valor económico de la compañía
  - Activos
    market consistent / mark-to-market
  - Provisiones
    mejor estimador / mark-to-model

- SCR = estadística del RTC
  capital ajustado al riesgo

- capital libre = RTC – SCR ≥ 0

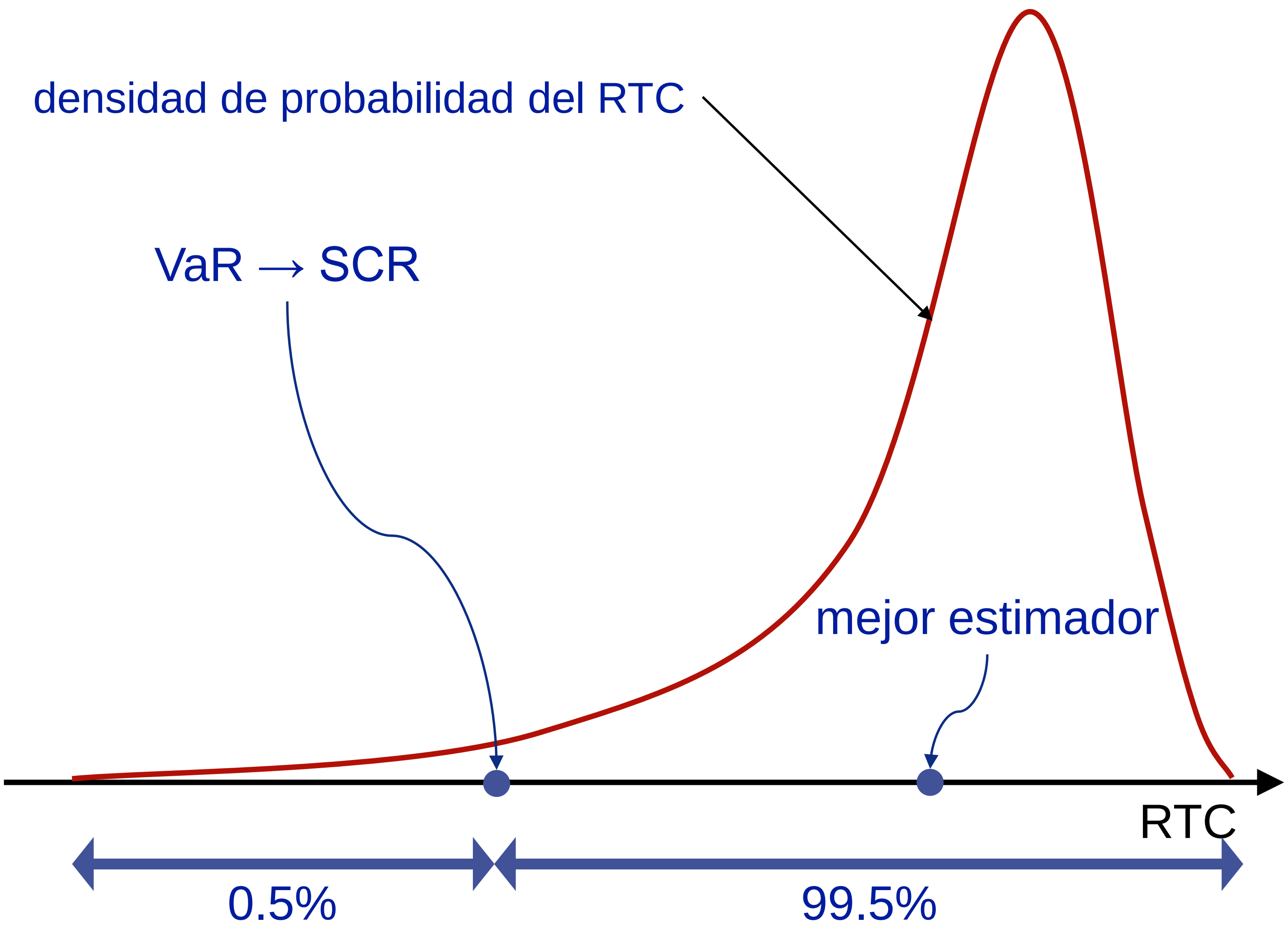
RTC
- T=1 PARAMETERS

RTC & SCR



aggregation
- SIMULATIONS

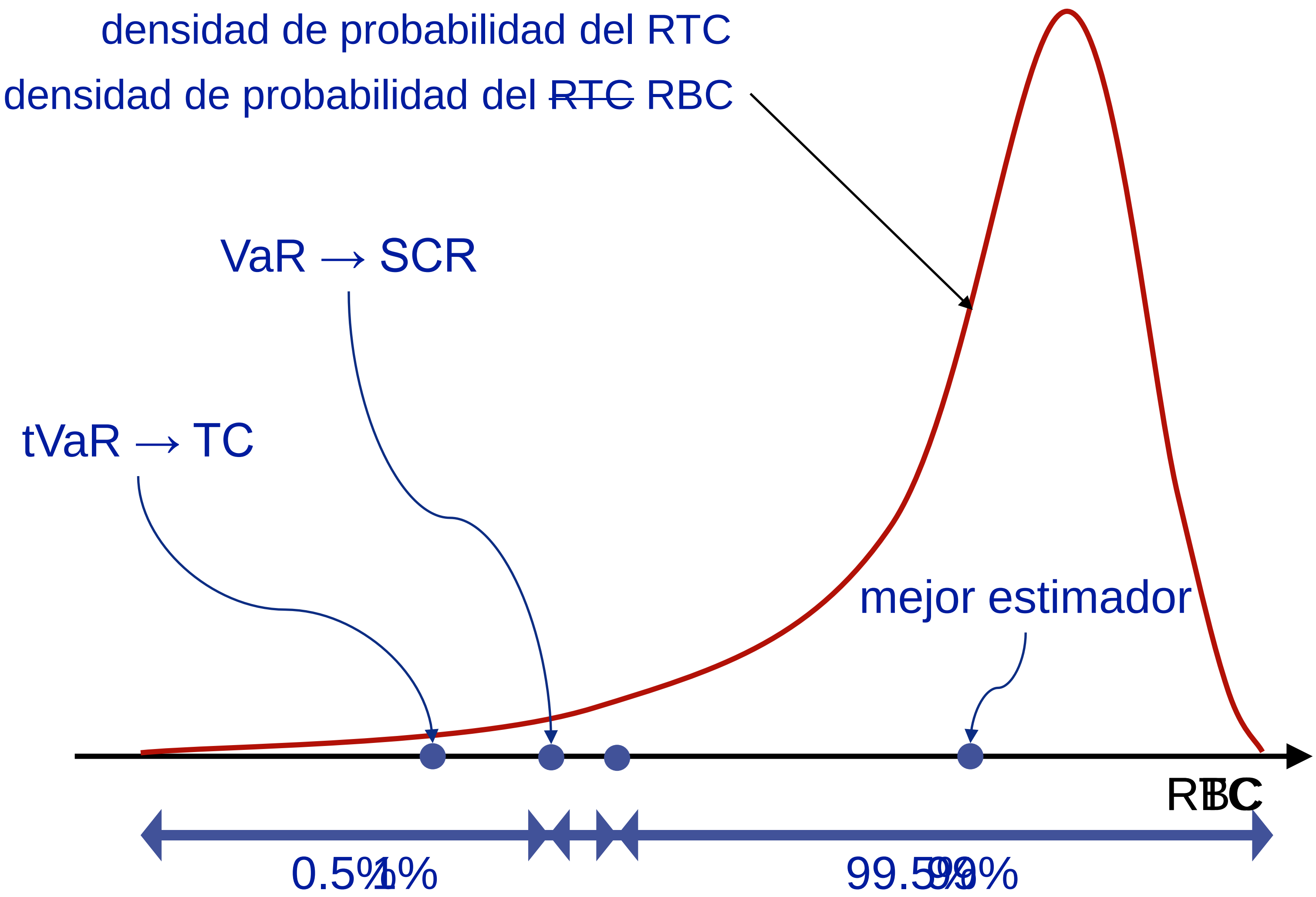
RTC & SCR



aggregation

- RTC T=1 DISTRIBUTION

RBC & TC (SST)


densidad de probabilidad del RTC
densidad de probabilidad del ~~RTC~~ RBC
VaR → SCR
tVaR → TC
mejor estimador
RTC
RBC
0.5%
1%
99.5%
99%

Formulas centrales

$$\boxed{RTC = \sum_k S_k}$$

cuenta

$$\boxed{VaR_\varepsilon(X) = \max\left[x \mid P(X \le x) \le \varepsilon\right] \qquad tVaR_\varepsilon(X) = E\left[X \mid X \le VaR_\varepsilon(X)\right]}$$

Diferencias S II y SST

	S II	SST
inicio	2014 - 2015	2006 - 2008
capital requerido	“RTC”	“RBC”
capital disponible	VaR(99.5%) → “SCR”	tVaR(99%) → “TC”
horizonte de riesgo	1 año	1 año
riesgo de seguro	✓	✓
riesgo de mercado	✓	✓
riesgo de crédito	✓	✓
riesgo operacional	✓	✗
escenarios	✗	✓
modelo interno	☹	☺

metadata

Otras componentes

- other assets
  - premium receivables
  - reinsurance receivables
  - ...
- other liability
  - accounts payable
  - UPR
  - ULAE
  - ...
- other profit
  - tax refund
  - ...
- other loss
  - salaries
  - expenses
  - ...

RTC
- LINE ITEMS

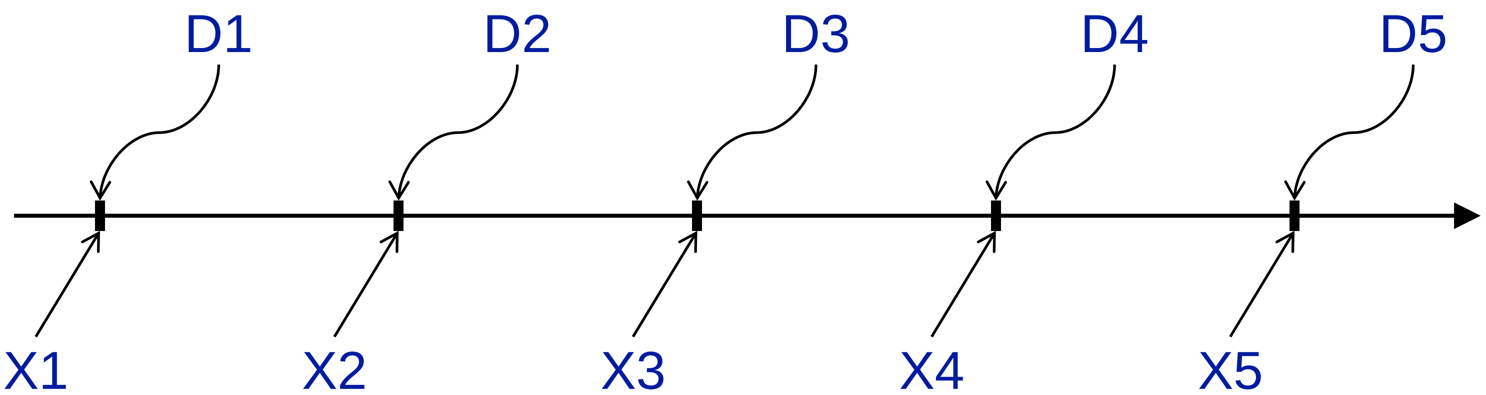
Agenda

EXPERTS FOR EXPERTS

- Solvencia
- RTC
- SCR
- Usos y Abusos

MCV

- Flujo determinista: $\vec{X} \;=\; X_t$
- Descuento determinista: $\vec{D} \;=\; D_t \;=\; (1+r_t)^{-t}$
- MCV flujo: $S = \;\vec{X}\cdot\vec{D} \;=\; \langle X \,|\, D \rangle \;=\; \sum_t X_t D_t$

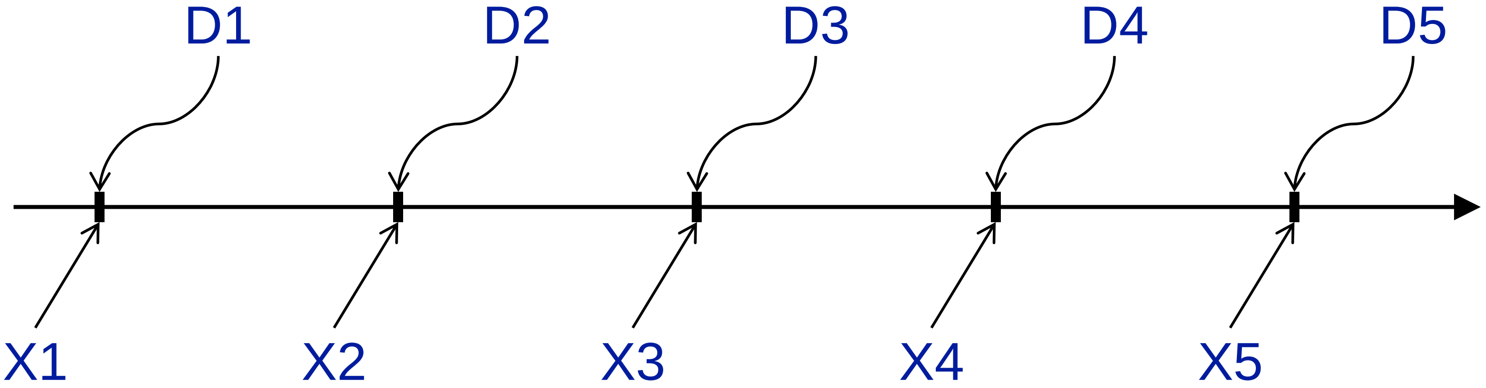


guess game
- DISCOUNT OF AVERAGE

MCV

- Flujo ~~determinista:~~ estocástico $\vec{X} \;=\; X_t$
- Descuento ~~determinista:~~ estocástico $\vec{D} \;=\; D_t \;=\; (1+r_t)^{-t}$
- MCV flujo: $S = \vec{X}\cdot\vec{D} \;=\; \langle X \mid D \rangle \;=\; \sum_t X_t D_t$

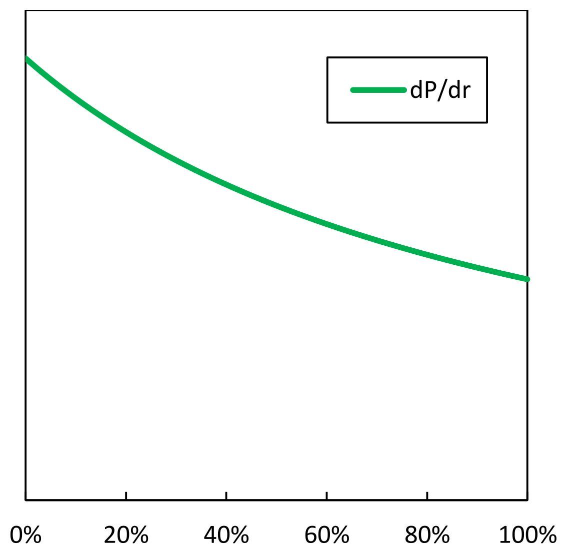
$$S = E\left[\vec{X}\cdot\vec{D}\right] = E\left[\langle X \mid D \rangle\right] = E\left[\sum_t X_t D_t\right]$$

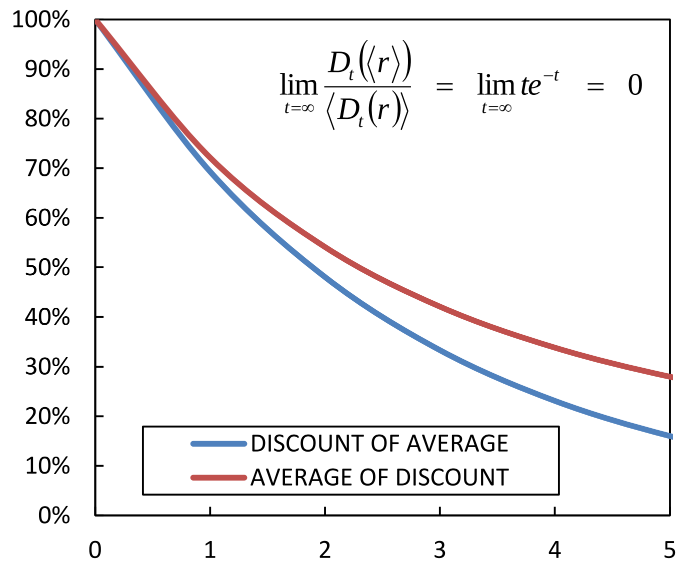


guess game
- AVERAGE OF DISCOUNT

Modelo de tasas de interés sencillo

- Modelo $$P(r \le x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} \qquad 0 \le x \le 1$$
- Tasa de interés $$\langle r \rangle = \int \mathrm{d}P\ r = \frac{1}{\ln 2} - 1 \qquad D_t(\langle r \rangle) = \boxed{(\ln 2)^t}$$
- Descuento $$D_t(r) = (1+r)^{-t} \qquad \langle D_t(r) \rangle = \int \mathrm{d}P\ D_t(r) = \boxed{\frac{1-2^{-t}}{T \ln 2}}$$





toy model

MCV
Complejidad creciente

PRS
EXPERTS FOR EXPERTS

flujo estocástico

yield curve

$$S = \vec{X}\cdot\vec{D}(r) \longrightarrow \vec{X}\cdot\vec{D}(\vec{r}) \longrightarrow \vec{X}\cdot E\left[\vec{D}(\vec{r})\right] \longrightarrow E\left[\vec{X}\right]\cdot E\left[\vec{D}(\vec{r})\right] \longrightarrow E\left[\vec{X}\cdot\vec{D}(\vec{r})\right]$$

yield curve estocástica

tasa de interés fija

flujo
depende
del interés

Ingresos fijos

- Cartera de zero coupon bonds con varios vencimientos

- MCV T=0
  - flujo trivial $\vec{Z} = Z_t = Z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix}$
  - MCV $S = \sum_{t=1}^{\infty} Z_t \; E\left[D_t\left(\vec{r}_{T=0}\right)\right]$

- MCV T=1
  - flujo cambiado $\vec{Z}' = Z_t' = Z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{pmatrix}$
  - MCV $S = \sum_{t=1}^{\infty} Z_t' \; E\left[D_t\left(\vec{r}_{T=1}\right)\right]$

Inv3
- DATA

Inv3
- MCV T=0

Inv3
- MCV T=1

Provisiones vida

- Cartera de rentas con grupos de varias edades a

- MCV T=0
  - flujo $$\vec{X}_a = X_{at} = \quad X_a \left(1 \quad \frac{L_{a+1}}{L_a} \quad \frac{L_{a+2}}{L_a} \quad \ldots\right) \qquad L_a = \prod_{x=1}^{a-1}(1-q_x)$$
  - MCV $$S \;=\; \sum_{a}\sum_{t=1}^{\infty} \; E[X_{at}] \; E[D_t(\vec{r}_{T=0})]$$

- MCV T=1
  - flujo cambiado $$\vec{X}_a' = X_{at}' = \quad X_a \frac{L_{a+1}}{L_a} \left(1 \quad \frac{L_{a+2}}{L_{a+1}} \quad \frac{L_{a+3}}{L_{a+1}} \quad \ldots\right)$$
  - MCV $$S \;=\; \sum_{a}\sum_{t=1}^{\infty} \; E[X_{at}'] \; E[D_t(\vec{r}_{T=1})]$$

LoB4_PY
- DATA

mortality
- STANDARD MORTALITY TABLE

LoB4_PY
- MCV T=0

LoB4_PY
- MCV T=1

Provisiones vida
Opciones & garantías

- Si el flujo depende también de la tasa de interés $S = E\left[\vec{X} \cdot \vec{D}(\vec{r})\right]$

- T=0
  - RTC = media matemática no trivial
  - típicamente con escenarios económicos riesgo neutrales
  - por calculo Monte Carlo
  - duración ~ 1 hora

- T=1
  - SCR = distribución de RTC
  - Monte Carlo de Monte Carlo $\Rightarrow$ 💣
  - duración ~ 1 año
    - aproximación = cartera replicadora etc.
    - uso de técnicas de reducción de varianza

Provisiones daños

- mejor estimador
  - Chain Ladder, Born-Ferg, …
- Market consistent
  - descuenta con yield curve
- Inflación
  - deflacionar los siniestros pasados
  - inflacionar los siniestros futuros

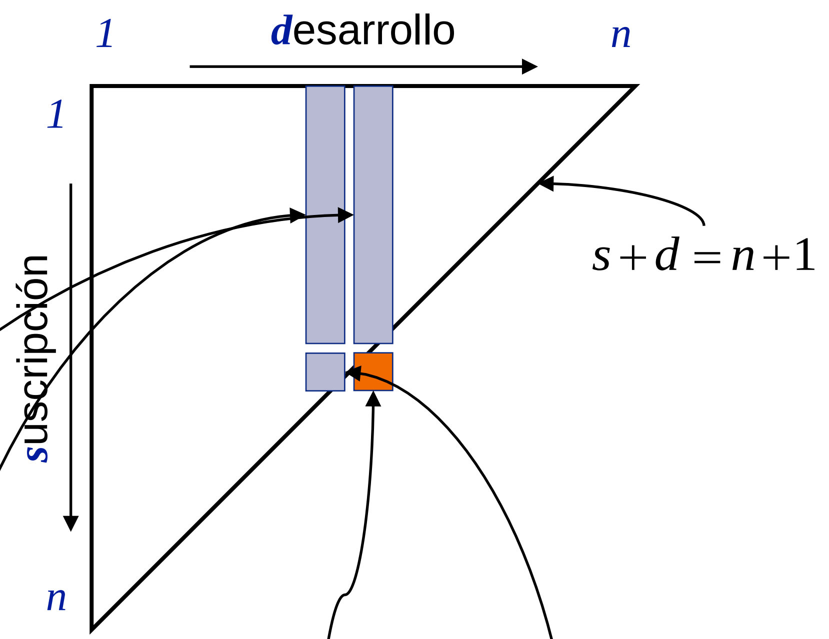
LoB1_PY
- CUMULATIVE

Notaciones:

s = índice año de suscripción

d = índice año de desarrollo

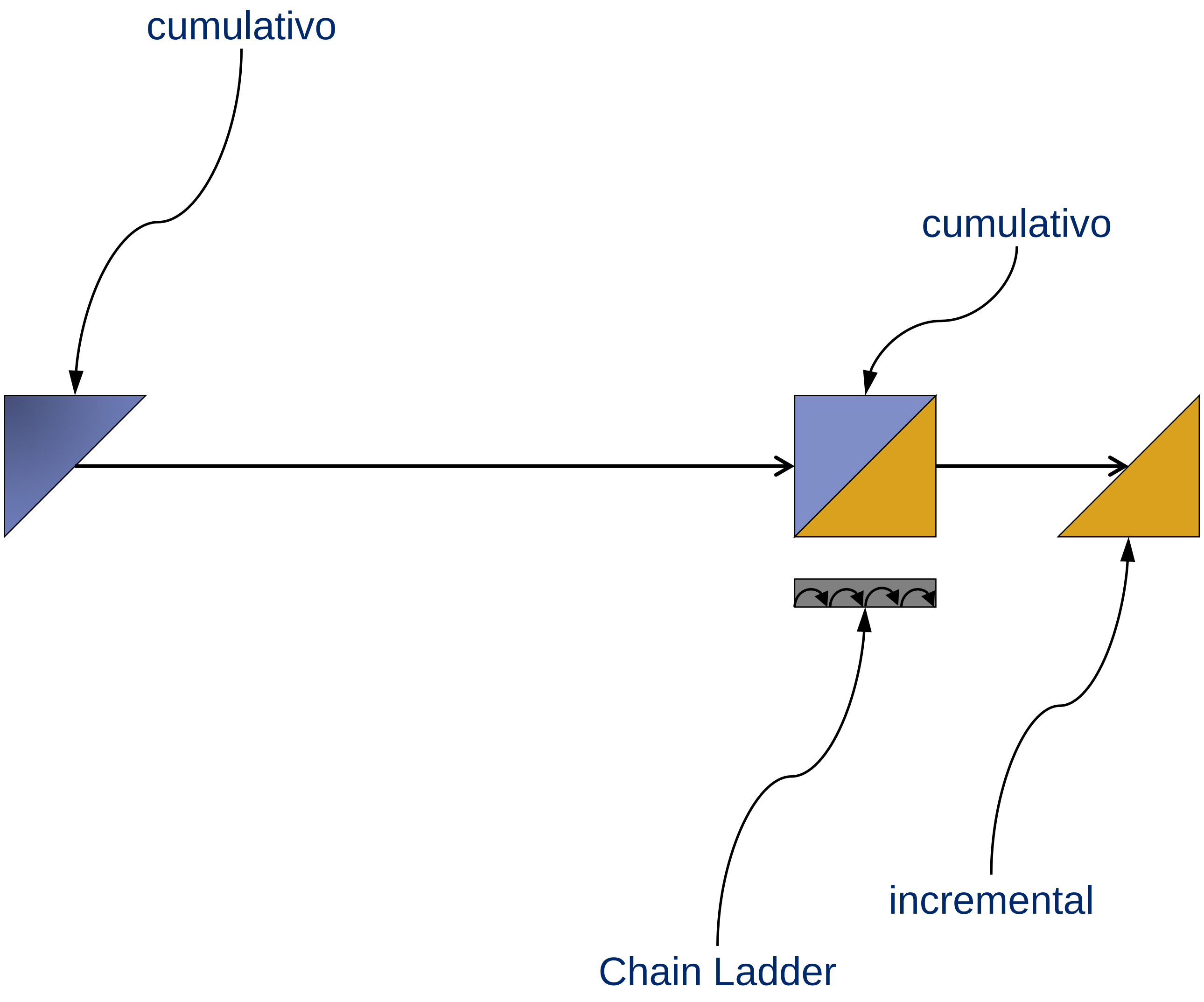
$C_{s,d}$ = provisión cumulativa



Algoritmo:

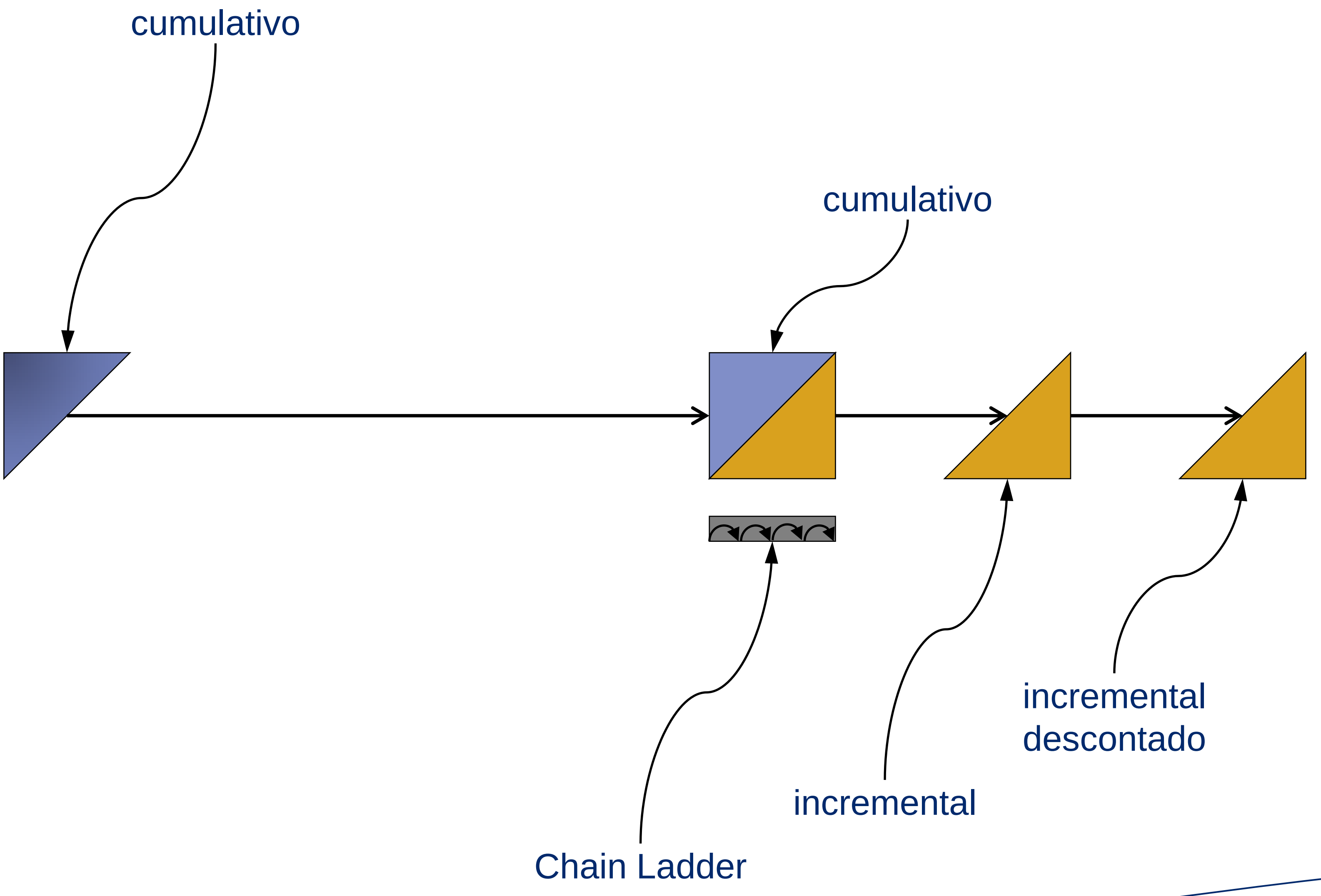
$$\lambda_{d-1} = \sum_{s=1}^{n-d+1} C_{s,d} \Big/ \sum_{s=1}^{n-d+1} C_{s,d-1} \qquad C_{s,d} = \lambda_{d-1} \cdot C_{s,d-1}$$

Provisiones daños Clásicas



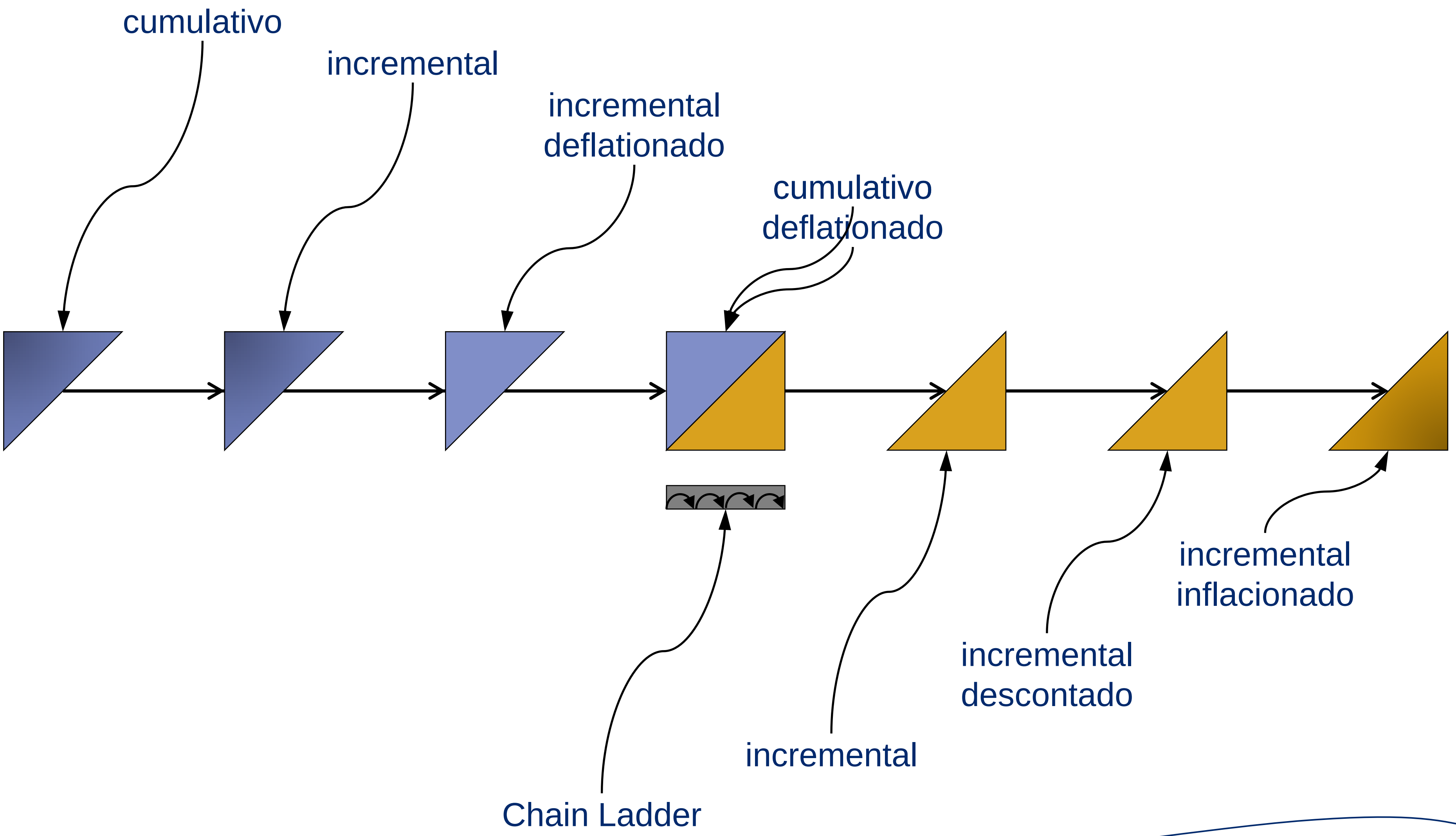
LoB1_PY

Provisiones daños Descontadas



LoB1_PY

Provisiones daños Inflacionadas



LoB1_PY

Agenda

- Solvencia
- RTC
- SCR
- Usos y Abusos

Formulas centrales

$$RTC = \sum_k S_k$$

cuenta

$$VaR_\varepsilon(X) = \max\left[x \mid P(X \le x) \le \varepsilon\right] \qquad tVaR_\varepsilon(X) = E\left[X \mid X \le VaR_\varepsilon(X)\right]$$

$$SCR = RTC_{T=0} - tVaR\left[RTC_{T=1}\right]$$

riesgo de crédito

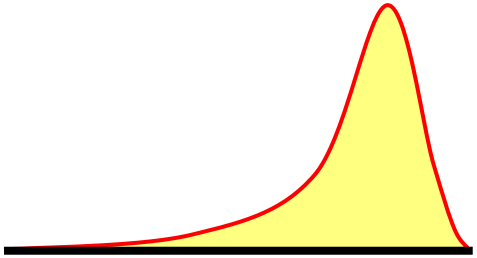
margen de riesgo

descuento

Modelar el RTC

- SCR = estadística de la distribución del RTC en T=1
- RTC(T=0) =

- RTC(T=1) =

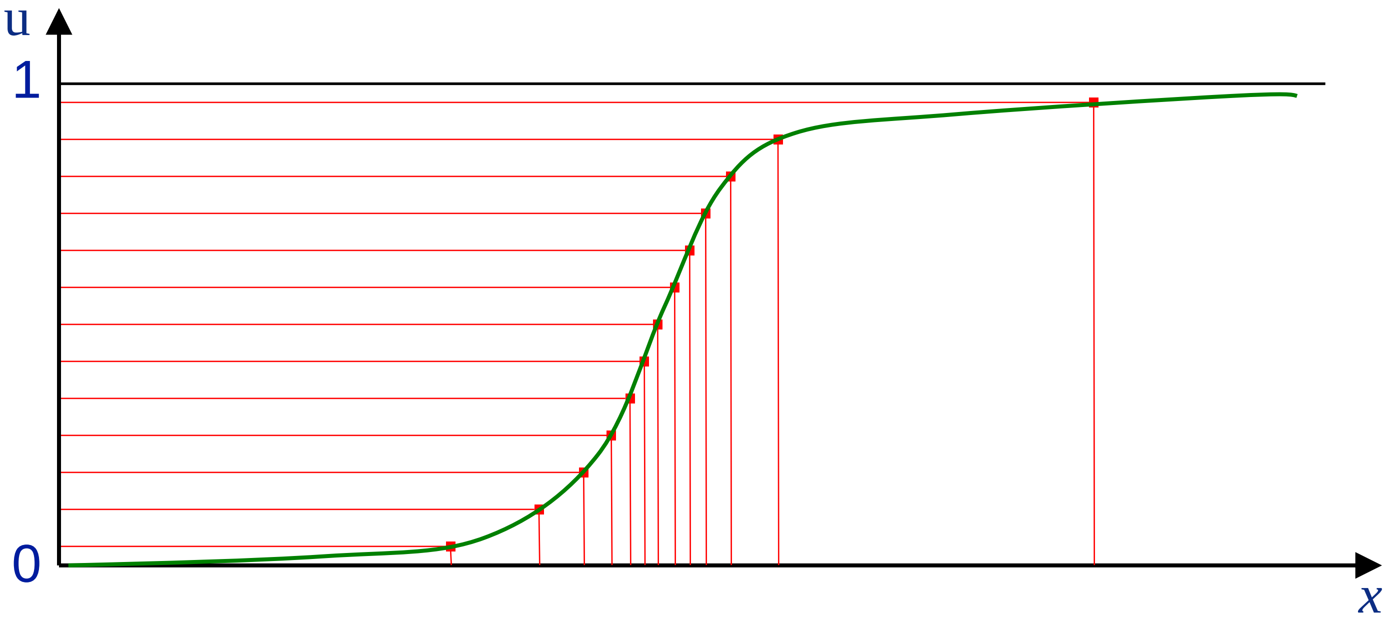


Generación de distribuciones

- Generación de una variable aleatoria con distribución F_X

$$\Pr[X \le x] = F_X(x) = u$$

$$\boxed{u \sim U(0,1) \quad \rightarrow \quad x = F_X^{\leftarrow}(u)}$$

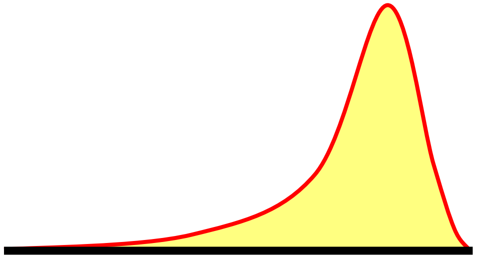


aggregation
- SIMULATIONS

Modelar el RTC

- SCR = estadística de la distribución del RTC en T=1
- RTC(T=0) =

- RTC(T=1) =



- RTC = suma de varios riesgos / variables aleatorias $RTC = \sum_k S_k$
  - convoluciona de manera numérica por Monte Carlo
  - riesgos independientes $\rightarrow$ $u_i \sim U(0,1)$ independientes
  - riesgos dependientes $\rightarrow$ $u_i \sim U(0,1)$ dependientes

aggregation
- INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

Varios riesgos

EXPERTS FOR EXPERTS

Riesgos directos

- Seguro
  - provisiones
  - suscripción
- Mercado
  - ingreso fijo
  - ingreso variable
- Crédito
- Operacional

Riesgos indirectos

- Modelos
- Parámetros
- Dependencias
- Reaseguro

Riesgos anadidos

- Escenarios deterministas
- MVM / Risk Margin

aggregation

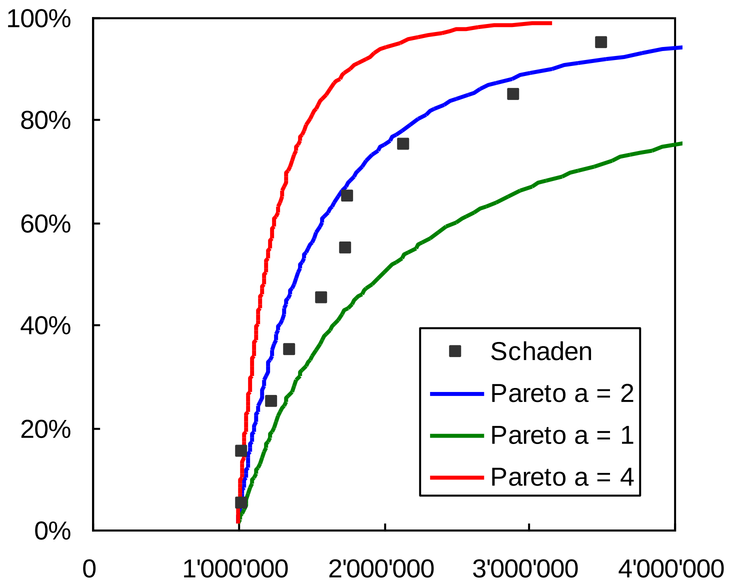
- RISKS

Riesgo de suscripción

- Siniestros de masa
  - modelo agregado: exponencial, normal, lognormal, Czeledin, …
- Siniestros largos
  - modelo colectivo: Poisson-Pareto, Panjer-Poisson
- Siniestros catastróficos
  - modelo agregado: Czeledin, Pareto
  - modelo de exposición: distribución “empírica” de eventos

Ajuste de parámetros

- Todas las observaciones tienen la misma probabilidad de ocurrencia
- Ordenar en función del tamaño → distribución de probabilidad empírica
- Ejemplo: modelo Pareto
  - $\Pr(X < x) = 1 - \left(\frac{T}{x}\right)^{\alpha}$
  - T fijo
  - como estimar α ?



LoB1_CY
- DATA
- DISTRIBUTION

Ajuste de parámetros
Método de momentos

EXPERTS FOR EXPERTS

- n parámetros: usa los n primeros momento

- Ejemplo: modelo Pareto
  - solo 1 parámetro $\Rightarrow$ usa la media

$$E[X] = T\frac{\alpha}{\alpha - 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{E[X]}{E[X] - T}}$$

Ajuste de parámetros
Método de máxima verosimilitud

- maximiza el logaritmo de la verosimilitud

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pr_i}{\partial x} \Delta x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \frac{\partial \Pr_i}{\partial x} = 0$$

- Ejemplo: modelo Pareto

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln L = \frac{n}{\alpha} + n \ln T - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{x_i}{T}}}$$

Ajuste de parámetros
Método Chi cuadrado

EXPERTS FOR EXPERTS

- considera el error de medida ☺
- minimiza la función Chi cuadrada

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - x(\mathrm{Pr}_i)}{\Delta x_i} \right)^2$$

- Ejemplo: modelo Pareto

$$\mathrm{Pr}_i = 1 - \left(\frac{T}{x_i} \right)^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad x(\mathrm{Pr}_i) = \frac{T}{(1 - \mathrm{Pr}_i)^{1/\alpha}}$$

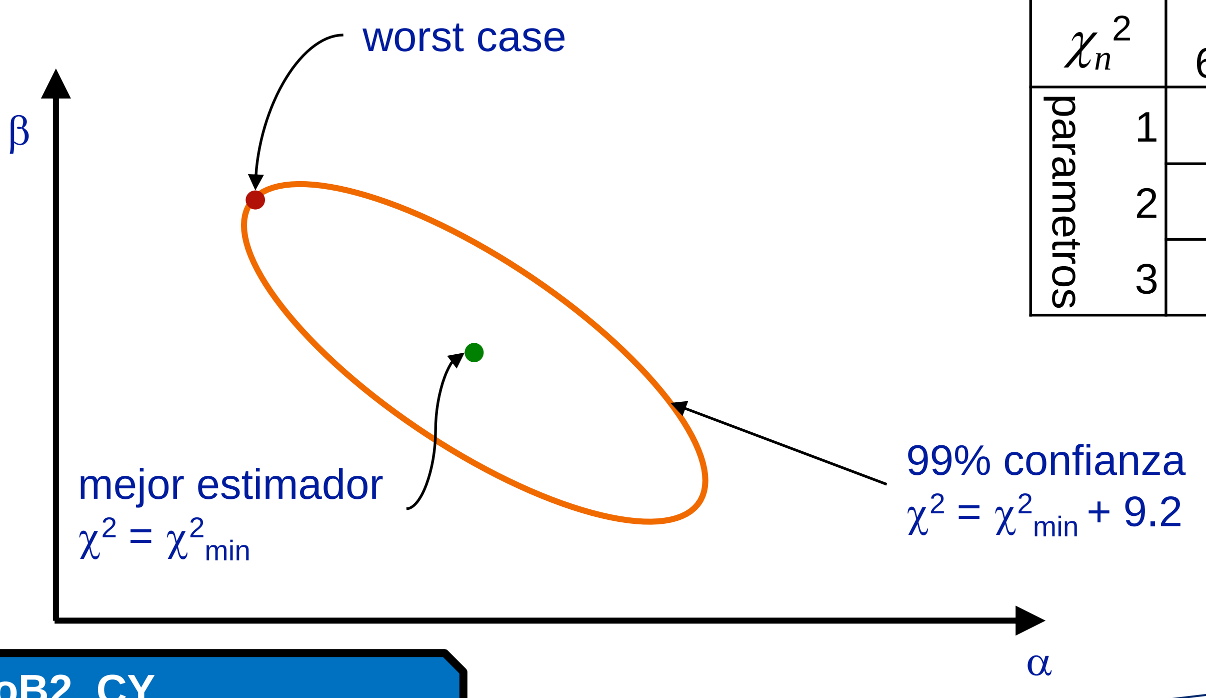
- calidad del ajuste

$$\chi^2_{\min} \sim E\left[\chi^2\right] = \mathrm{dof} = \mathrm{observaciones} - \mathrm{parametros}$$

LoB1_CY
- FIT PARETO

Riesgo de parámetros

- 1 parámetro: intervalo de confianza 1σ definido por $\chi^2 \le \chi^2_{\min} + 1$
- En general: espacio de confianza 1-ε definido por $\chi^2 \le \chi^2_{\min} + \chi^2_n(1-\varepsilon)$



χ_n^2		confianza			
		68.3%	90%	99%	99.5%
parametros	1	1.0	2.7	6.6	7.9
	2	2.3	4.6	9.2	10.6
	3	3.5	6.2	11.3	12.8

Ajuste de parámetros
Resumen

AJUSTES	momentos	máxima verosimilitud	Chi cuadrado
facilidad de uso	✓	✓	✓
uso del error de medida	✗	✗	✓
comparación de modelos	✗	✓	✓
calidad de ajuste	✗	✗	✓
intervalos de confianza	✗	✗	✓

Riesgo de suscripción
Siniestros de masa o catastróficos

- Historia de siniestros anuales → ajuste a distribución
  - exponencial
  - normal
  - lognormal
  - Czeledin
  - Pareto

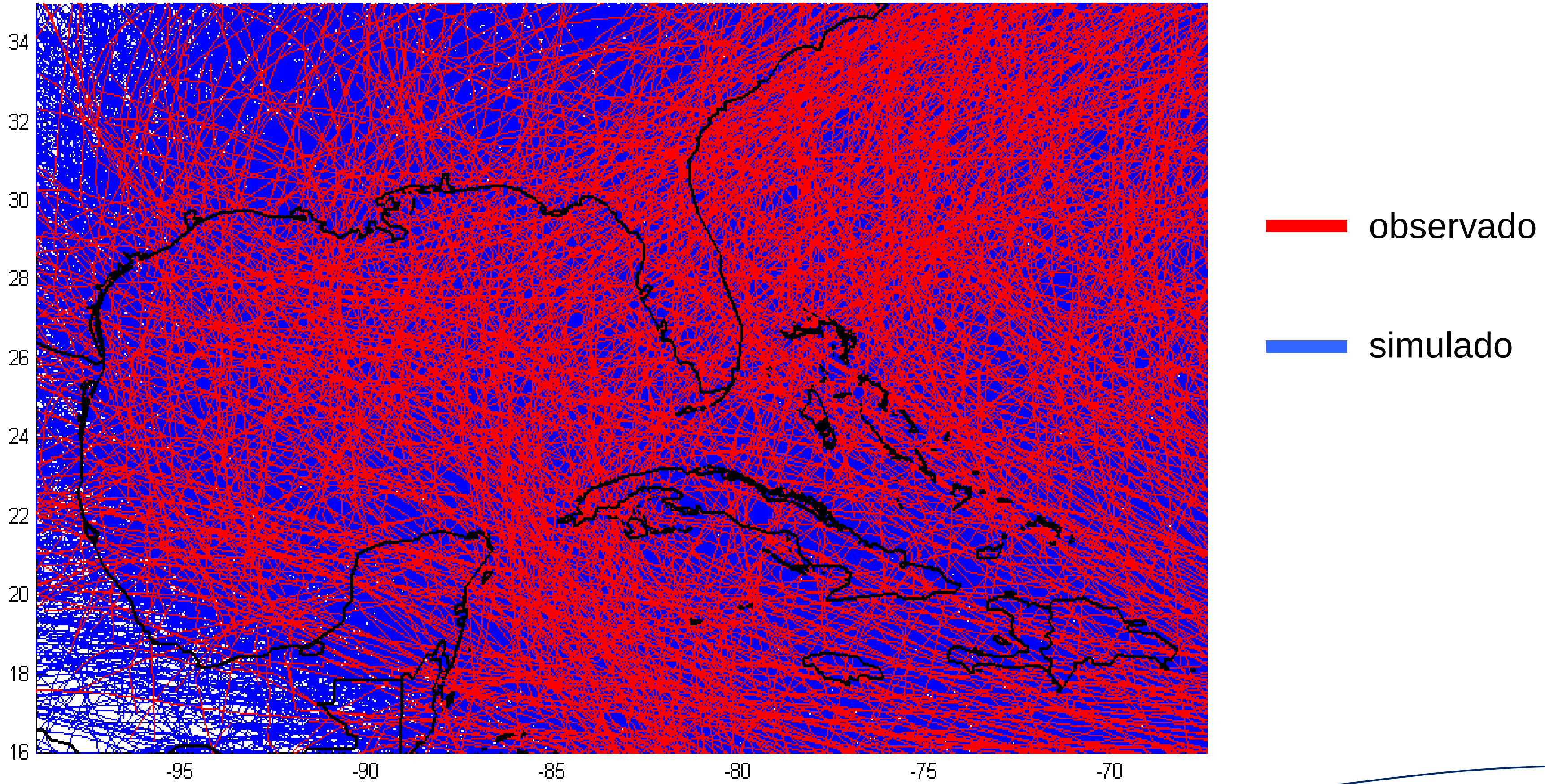
siniestros de masa

siniestros catastróficos

- Recalibra las observaciones (cifras “as-if”)
  - inflación
  - cambios de política gubernamental o interna
  - cambios de exposición

Riesgo de suscripción
Siniestros catastróficos

- Distribución “empírica” de eventos



Riesgo de suscripción
Siniestros largos

- Siniestro anual = $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$

- Modela S con historia de
  - frecuencias de siniestros N : Poisson o binomial negativa
  - severidades de siniestros X : Pareto, lognormal, ... (todas iid)

- Siniestro anual convolucionado de manera numérica
  - Panjer, FFT
  - Monte Carlo

- Recalibra las observaciones (cifras "as-if")
  - inflación (severidad)
  - cambios de política gubernamental o interna (severidad, frecuencia)
  - cambios de exposición (frecuencia)

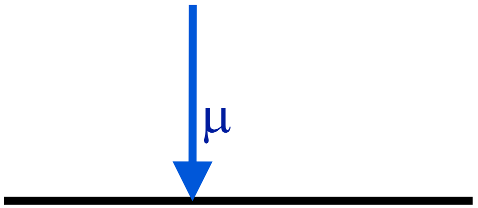
LoB3_CY

Riesgo de provisiones

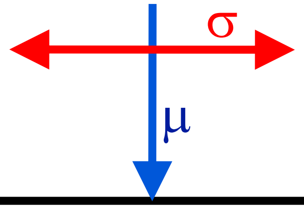
- 2 fuentes independietes de volatilidad
  - proceso de desarollo
  - inflación

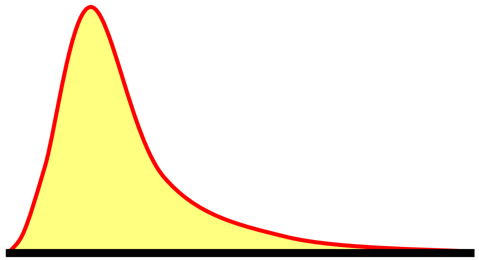
Riesgo de provisiones
Proceso de desarollo

- mejor estimador
  - métodos clásicos: Chain Ladder, …



- Riesgo estadístico y sistemático
  - modelos estadísticos: Mack, …





  - modelos estocásticos: bootstrap, MCMC, …

☺ conserva las dependencias

Riesgo de provisiones
Mack Chain Ladder

EXPERTS FOR EXPERTS

Presunciones:

$C_{s,d}$ independientes por cada año de suscripción s

$$E\left[C_{s,d} \middle| C_{s,1} \cdots C_{s,d-1}\right] = \lambda_{d-1} \cdot C_{s,d-1}$$

$$V\left[C_{s,d} \middle| C_{s,1} \cdots C_{s,d-1}\right] = \sigma_{d-1} \cdot C_{s,d-1}$$

Varianzas proporcionales a las medias

Matiz de desarrollo idénticos por todos los años de suscripción

Futuro determinado solo por la ultima diagonal

Años de suscripción independientes

PRS EXPERTS FOR EXPERTS

Presunciones:

$C_{s,d}$ independientes por cada año de suscripción s

$$E\left[C_{s,d} \middle| C_{s,1}\cdots C_{s,d-1}\right] = \lambda_{d-1}\cdot C_{s,d-1}$$

$$V\left[C_{s,d} \middle| C_{s,1}\cdots C_{s,d-1}\right] = \sigma_{d-1}\cdot C_{s,d-1}$$

consecuencias:

(suponiendo una distribución normal)

$$C_{s,d} \sim N\left(E\left[C_{s,d}\right], V\left[C_{s,d}\right]\right) \Rightarrow \sum_{s=1}^{n-d+1}\frac{\left(C_{s,d}-\lambda_{d-1}\cdot C_{s,d-1}\right)^2}{\sigma_{d-1}\cdot C_{s,d-1}} \sim \chi^2_{n-d}$$

grados de libertad =
observaciones - parámetros

Ajuste chi^2:

$$\frac{\partial \chi^2_{n-d}}{\partial \lambda_{d-1}} = 0 \Rightarrow \lambda_{d-1} = \sum_{s=1}^{n-d+1} C_{s,d} \Big/ \sum_{s=1}^{n-d+1} C_{s,d-1}$$

$$E\left[\chi^2_{n-d}\right] = n-d \Rightarrow \sigma_{d-1} = \frac{1}{n-d}\sum_{s=1}^{n-d+1} C_{s,d-1}\left(\frac{C_{s,d}}{C_{s,d-1}}-\lambda_{d-1}\right)^2 \rightarrow \Delta R$$

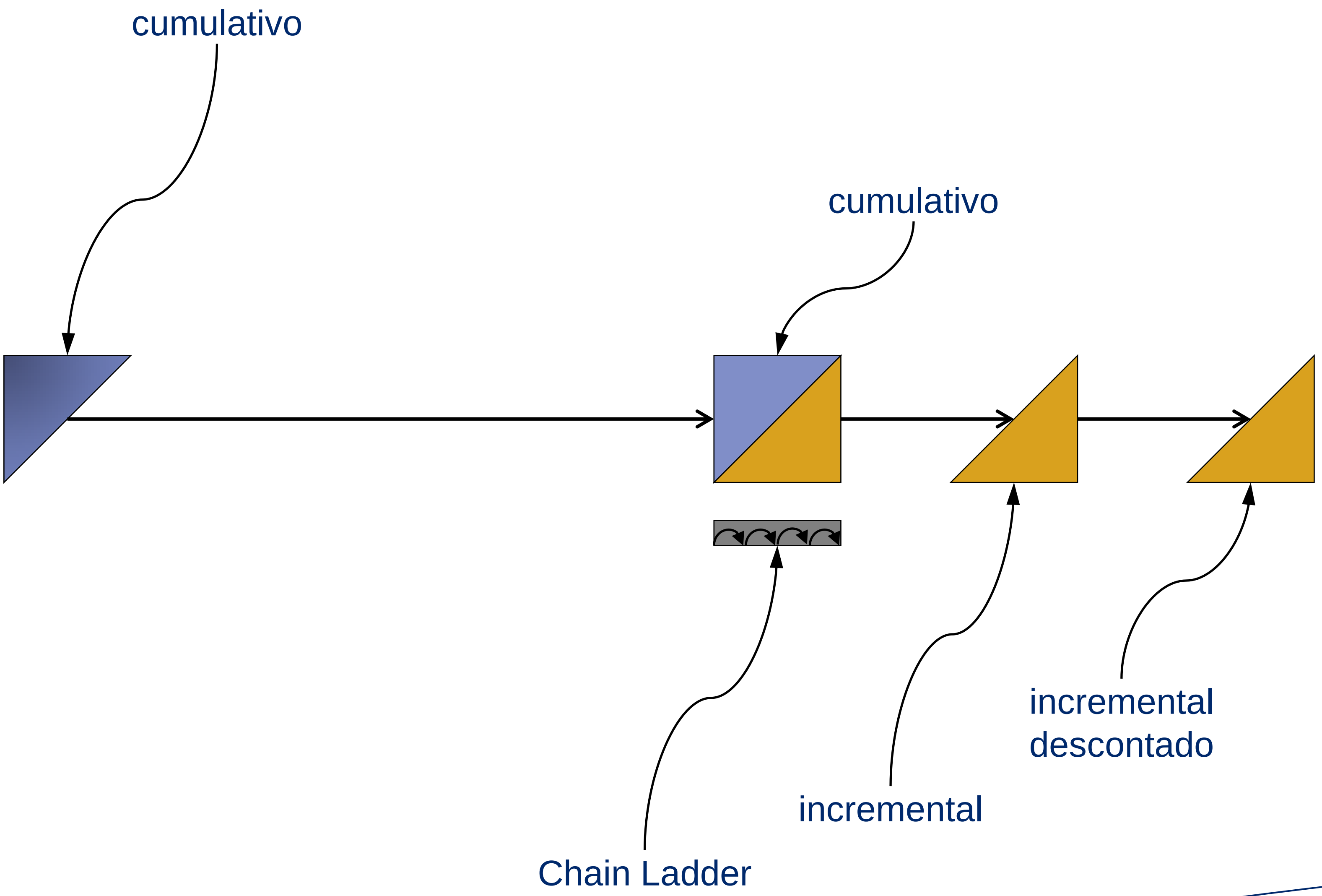
LoB1_PY
- Mack Chain Ladder

Riesgo de provisiones
Horizonte a 1 año

- Mack Chain Ladder → volatilidad al ultimo

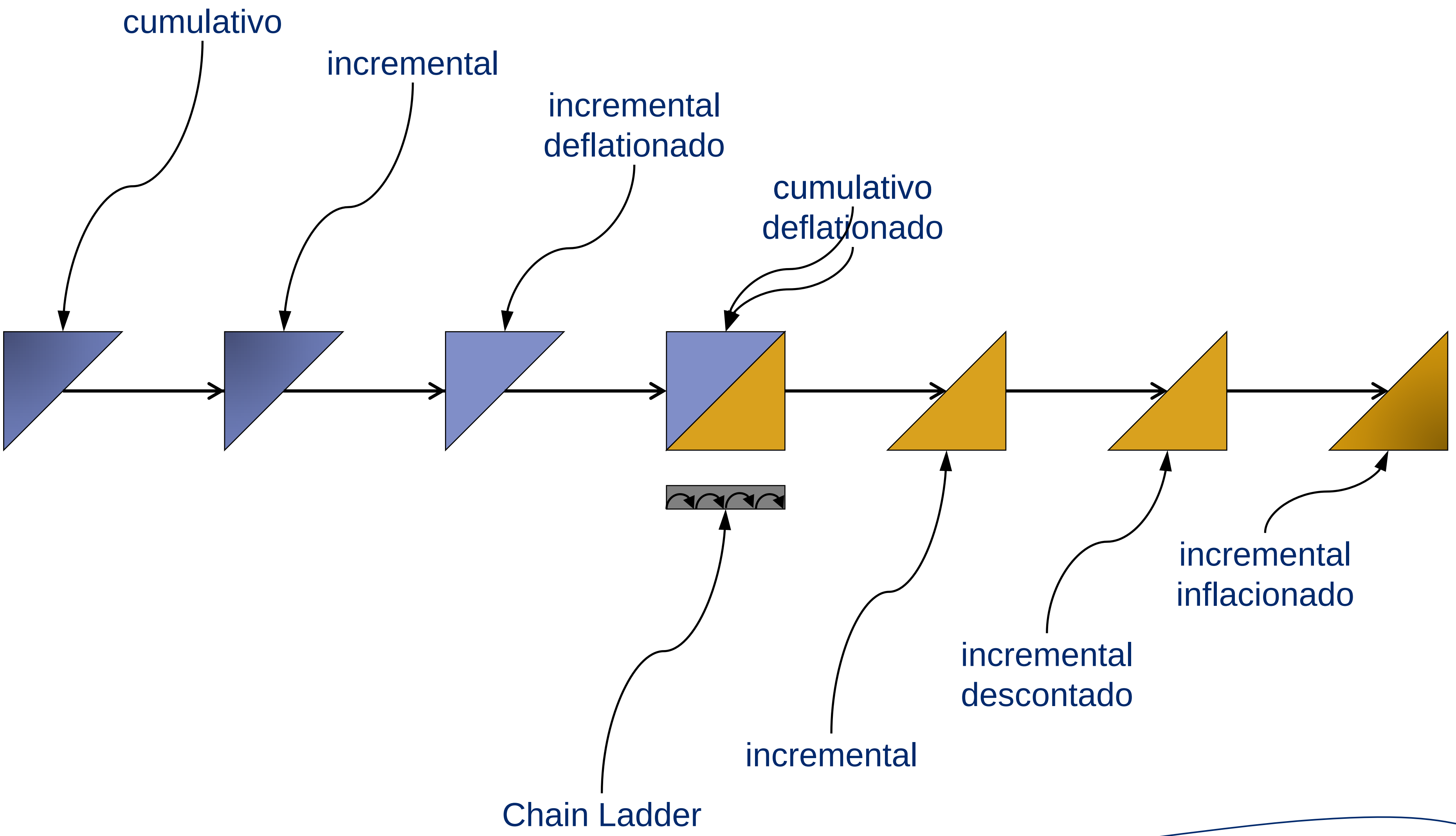
- Solvencia II / SST → volatilidad de la próxima diagonal
  - método de Merz-Wüthrich
  - bootstrap
  - Markov chain Monte Carlo
  - ...

Provisiones daños
Clásicas descontadas



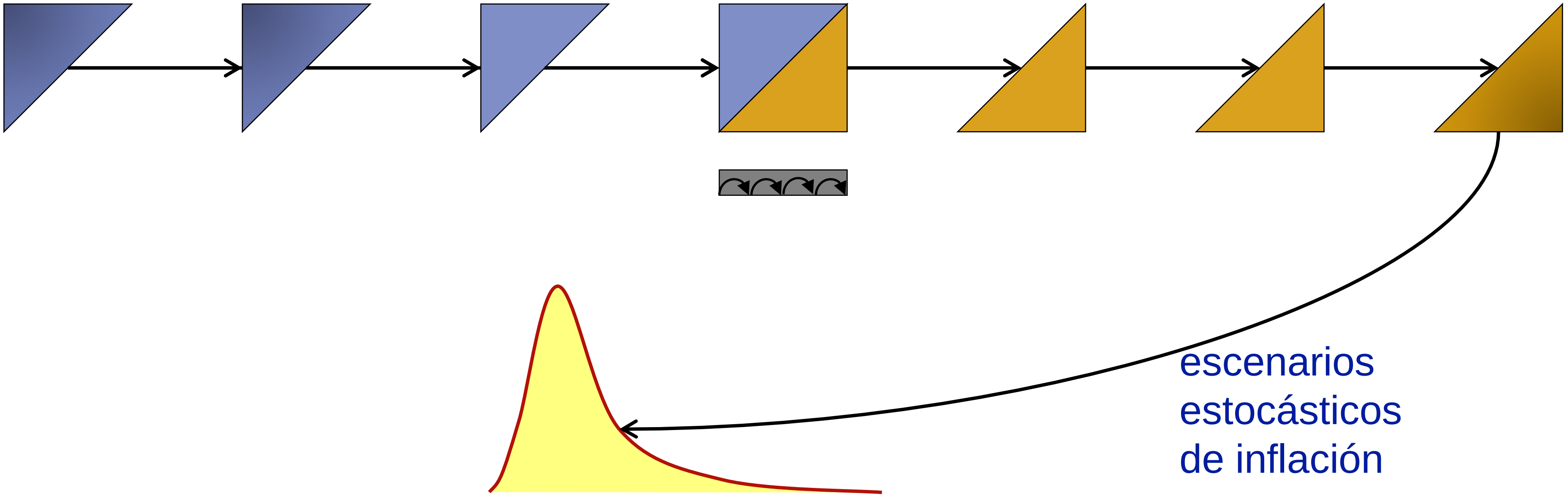
LoB1_PY

Provisiones daños Inflacionadas



LoB1_PY

Riesgo de provisiones
Inflación



LoB1_PY
- SIMULATED INFLATIONS

Riesgo de provisiones

- 2 fuentes independientes de volatilidad
  - proceso de desarrollo $\rightarrow \sigma$
  - inflación $\rightarrow \mu_i$

- Combinación
  - cada escenario de inflación con esperanza μ_i
  - provisión distribuida lognormal con desviación estándar σ

proceso aleatorio

$$S \sim LN(\mu_i, \sigma)$$

variable aleatoria

aggregation
• RISKS

Riesgo de mercado

Tipos de riesgos

- Riesgos directos
  - Obligaciones
  - Acciones
  - …
- Riesgos indirectos
  - Tasas de interés
  - Inflación
  - FX
  - …

Tipos de modelos

- Modelos individuales
  - Procesos de Wiener
  - …
  - ☹ Dependencias
- ESG
  - ☺ Dependencias
  - ☺ Relación con riesgos de crédito

Riesgo de mercado
Ingresos variables

- Proceso de Wiener: $\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} \sim N(\mu, \sigma)$

ajustes

observaciones mensuales

- Distribución del riesgo: $S_{T=1} \sim S_{T=0} \; LN\left(12\mu, \sqrt{12}\sigma\right)$

horizonte = 1 año

Inv2

Riesgo de modelo

- No se puede cuantificar
- Pero a veces se puede anticipar...

modelos normales 💣

Inv1

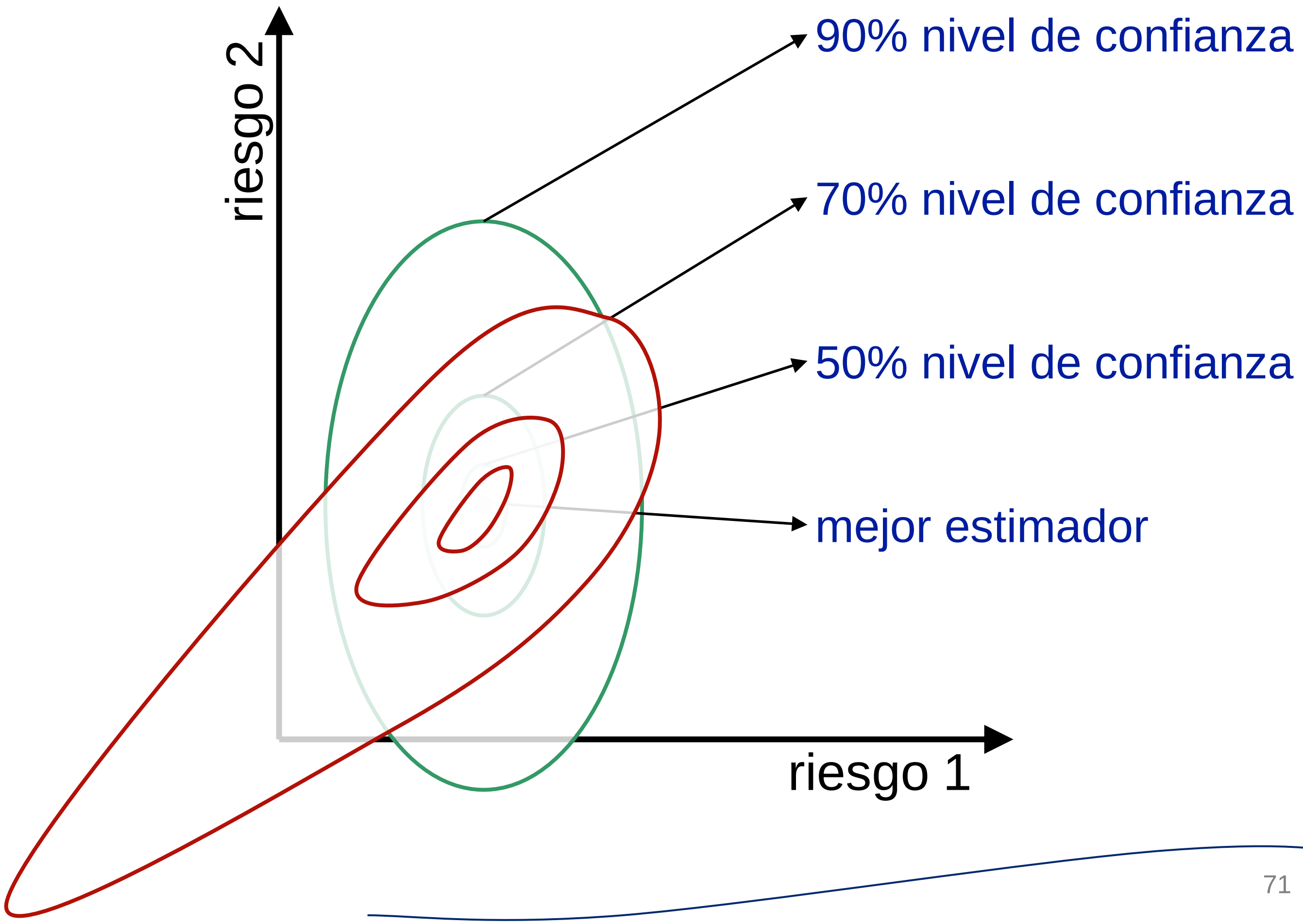
Dependencias entre riesgos

Kobe EQ

- daños
- robo
- Barings Bank

September 11

- aviacion
- daños
- BI
- vida
- mercado
- …



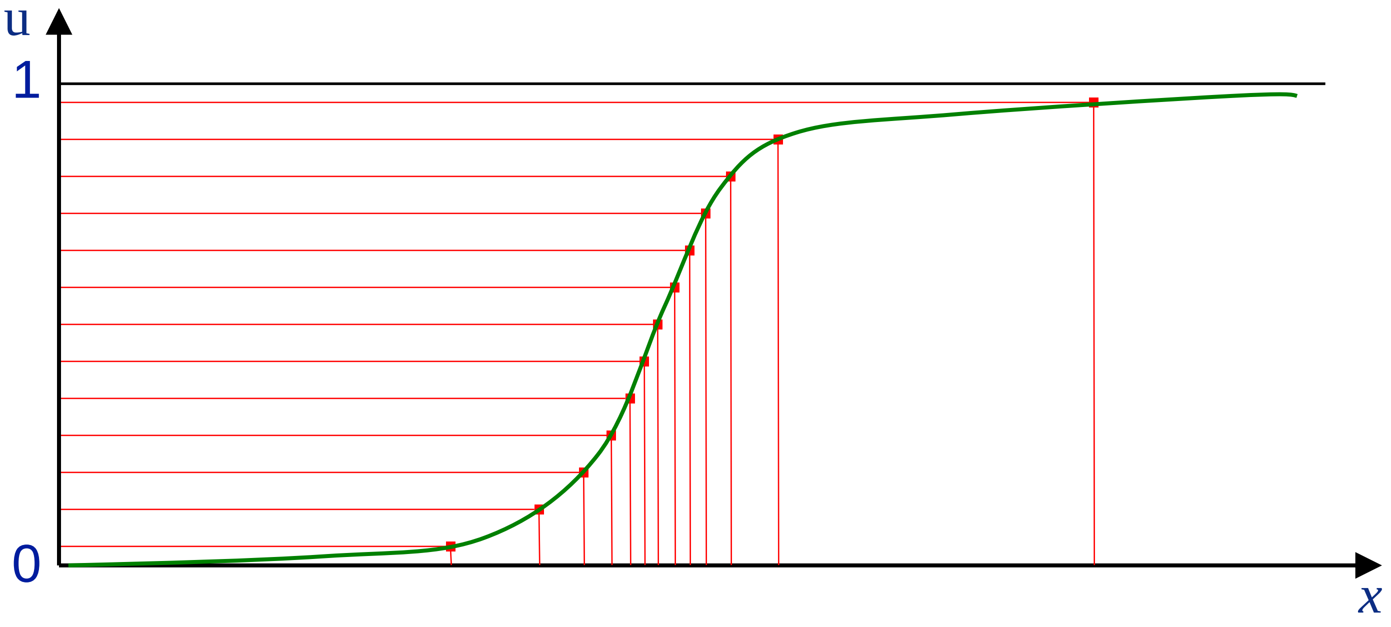
Inv1-2_dependence
RANK CORRELATION

Generación de distribuciones

- Generación de una variable aleatoria con distribución F_X

$$\Pr[X \leq x] = F_X(x) = u$$

$$\boxed{u \sim U(0,1) \quad \rightarrow \quad x = F_X^{\leftarrow}(u)}$$



Generación de distribuciones de 2 variables

- Generación de una variable aleatoria con distribución F_X

$$\Pr[X \le x] \;=\; F_X(x) \;=\; u$$

$$\boxed{u \;\sim\; U(0,1) \qquad \rightarrow \qquad x \;=\; F_X^{\leftarrow}(u)}$$

- Generación de una 2ª variable aleatoria con distribución F_Y

$$\Pr[Y \le y] \;=\; F_Y(y) \;=\; v$$

Copula

$$\Pr[X \le x, Y \le y] \;=\; C(u,v)$$

$$\Pr[Y \le y \mid X = x] \;=\; \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \;=\; q$$

$$\boxed{\begin{array}{l} q \;\sim\; U(0,1) \\[2em] v \;=\; \dfrac{\partial}{\partial u} C^{\leftarrow}(u,q) \qquad \rightarrow \qquad y \;=\; F_Y^{\leftarrow}(v) \end{array}}$$

Dependencias entre riesgos
Copulas

EXPERTS FOR EXPERTS

- Independiente $$C(u,v) = uv$$

$$q = \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) = v \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = q}$$

- comonotónica $$C(u,v) = \min(u,v)$$

$$q = \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) = H(v-u) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = u}$$

- Clayton $$C(u,v) = \left(u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$q = \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) = \left[\left(v^{-\alpha} - 1\right)u^{\alpha} + 1\right]^{-\frac{\alpha+1}{\alpha}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \left[\left(q^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}} - 1\right)u^{-\alpha} + 1\right]^{-\frac{1}{\alpha}}}$$

- Frank $$C(u,v) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left[1 + \frac{\left(e^{-\alpha u} - 1\right)\left(e^{-\alpha v} - 1\right)}{e^{-\alpha} - 1}\right]$$

Inv1-2_dependence
- CLAYTON COPULA

Riesgo de mercado
Ingresos fijos

- Cartera de zero coupon bonds con varios vencimientos

- MCV T=0
  - flujo trivial $$\vec{Z} = Z_t = Z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$
  - MCV $$S = \sum_{t=1}^{\infty} Z_t \; E\left[D_t\left(\vec{r}_{T=0}\right)\right]$$

- Distribución T=1
  - flujo cambiado $$\vec{Z}' = Z_t' = Z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$
  - MCV $$\tilde{S} = \sum_{t=1}^{\infty} Z_t' \; \tilde{D}_t\left(\vec{r}_{T=1}\right)$$

variable aleatoria

Inv3
- RISK DISTRIBUTION T=1

Riesgo de provisiones Vida

- Cartera de rentas con grupos de varias edades a
- MCV T=0
  - flujo $$\vec{X}_a = X_{at} = X_a \left(1 \quad \frac{L_{a+1}}{L_a} \quad \frac{L_{a+2}}{L_a} \quad \ldots \right) \qquad L_a = \prod_{x=1}^{a-1} (1 - q_x)$$
  - MCV $$S = \sum_a \sum_{t=1}^{\infty} E[X_{at}] \; E[D_t(\vec{r}_{T=0})]$$
- Distribución T=1
  - flujo cambiado $$\vec{X}'_a = X'_{at} = X_a \frac{\tilde{L}_{a+1}}{\tilde{L}_a} \left(1 \quad \frac{\tilde{L}_{a+2}}{\tilde{L}_{a+1}} \quad \frac{\tilde{L}_{a+3}}{\tilde{L}_{a+1}} \quad \ldots \right)$$
  - MCV $$\tilde{S} = \sum_a \sum_{t=1}^{\infty} \tilde{X}'_{at} \; \tilde{D}_t(\vec{r}_{T=1})$$

variable aleatoria

LoB4_PY
- RISK DISTRIBUTION T=1

- Modelo sencillo de mortalidad $q_x \rightarrow \tilde{q}_x \sim q_x \; N(1,\sigma)$

$$L_a \rightarrow \tilde{L}_a = \prod_{x=1}^{a-1}(1-\tilde{q}_x)$$

- Flujo estocastico $X_{at} \rightarrow \tilde{X}_{at} = X_a \dfrac{\tilde{L}_{a+t}}{\tilde{L}_a}$

mortality

- VARIABILITY MORTALITY

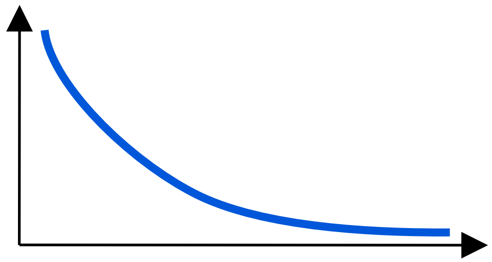
Mando Monte Carlo

- 💣 siempre usar la misma semilla aleatoria
  - debugging
  - reproducibilidad
- ☹ Monte Carlo brutal
  - dirigir por el numero de simulaciones $F_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f_i$
- ☺ Monte Carlo sutil
  - dirigir por la precisión obtenida $\Delta_N^2 \propto \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \left(F_N - f_i\right)^2$
  - acelerar con técnicas de reducción de varianza
  - solo concentrarse en la cola de la distribución

aggregation

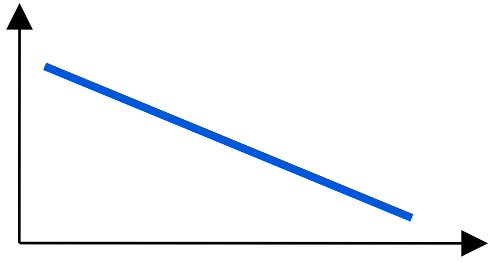
- RTC T=1 DISTRIBUTION

Mando Monte Carlo
Reducción de varianza

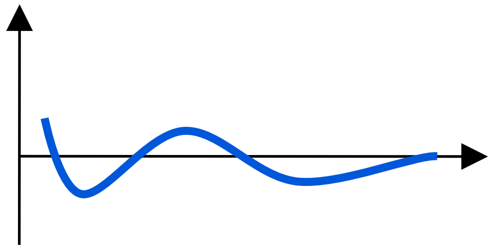


$$I = \int dx \; f(x) = ?$$

Monte Carlo ☹



$$\tilde{I} = \int dx \; \tilde{f}(x) = \text{conocido}$$



$$I = \int dx \left[f(x) - \tilde{f}(x) \right] + \int dx \; \tilde{f}(x)$$

$$= \int dx \; \Delta f \qquad\qquad + \tilde{I}$$

Monte Carlo ☺

MonteCarlo.xlsm

Riesgo de crédito

- Concepto Basilea II
  - modelo de factores
  - adicional a los otros riesgos

$$CR = CCF \sum_k w_k \; E\left[S_k\left(T = 1\right)\right]$$

factor de capital de crédito = 8%

ponderación de riesgo de crédito
(depende del tipo de instrumento y su rating)

credit

Escenarios deterministas

- Test de estrés → entender los riesgos
- Solvencia II: análisis cualitativo
- SST: cuantificación de riesgos no/mal modelados
  - Distribución marginal de cola gruesa (ej.: 2008)
  - Dependencias de cola (ej.: pandemia)

traslación del RTC

distribución con escenarios

$$P\left[RTC \le x\right] = \sum_{s=0}^{S} p_s \; P_0\left[RTC + \Delta_s \le x\right]$$

probabilidad de ocurrencia

distribución sin escenarios

Margen de riesgo

PRS
EXPERTS FOR EXPERTS

- Posibilidad: run-off al final del horizonte de 1 año
- Precio de la cartera = $E\left[RTC_{T=1}\right] - MVM$
- MVM = Market Value Margin
  = coste del riesgo del run-off

$$MVM \quad D_1 \; = \; CoC \sum_{t=1}^{\infty} C_t \; D_t$$

coste del capital = spread sobre el rfr = 6%

flujo del riesgo non-transferible

descuento

- ¿Como calcular C_t?
- Sugerencia FINMA: $C_t = C_0 \dfrac{p_t}{p_0}$

patrón de run-off de las provisiones

???

MVM

Margen de riesgo

Formulas centrales

$$\boxed{RTC = \sum_k S_k}$$

cuenta

$$\boxed{VaR_\varepsilon(X) = \max\left[x \mid P(X \le x) \le \varepsilon\right] \qquad tVaR_\varepsilon(X) = E\left[X \mid X \le VaR_\varepsilon(X)\right]}$$

$$\boxed{SCR = RTC_{T=0} - \left\{ tVaR\left[RTC_{T=1}\right] - CR - MVM \right\} D_1}$$

riesgo de crédito

margen de riesgo

descuento

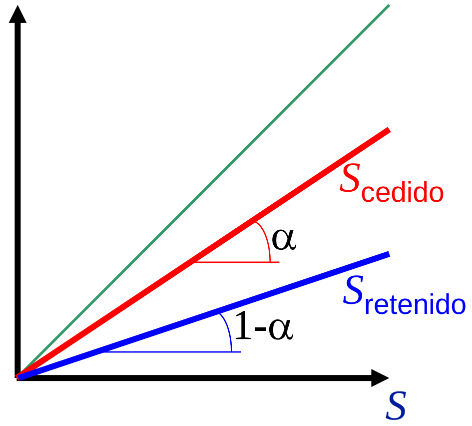
SCR

- SOLVENCY CAPITAL REQUIREMENT

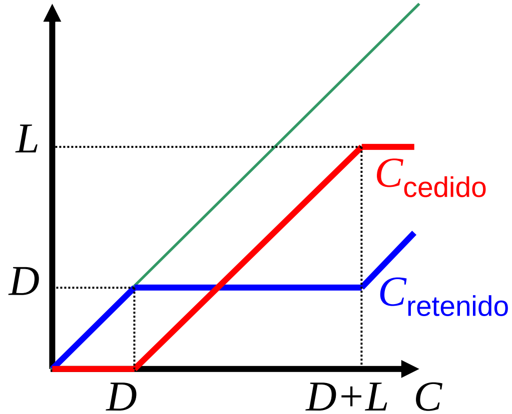
N = frecuencia = numero de siniestros

X^i = severidad del siniestro individual i

S = severidad del siniestro agregado = $\sum_{i=1}^{N} X^i$



- QS: cesión = $\alpha \quad S$
- SL: cesión = $\min(S-D, L)_+$
- XL: cesión = $\min(X-D, L)_+$



reinsurance

Reaseguro

- Cesiones dependen inequívocamente de los siniestros originales
  $\Rightarrow$ dependencia comonotónica con los otros riesgos

- Primas $P = \mu_{\text{cession}} + k \ \sigma_{\text{cession}}$

coste del riesgo asumido

burning cost

RTC
T=1 PARAMETERS

Diversificación

- Cualquier riesgo

$$S_k$$

$$RTC = \sum_k S_k$$

- Capital standalone $C_k = -\ tVaR\left[S_k - \overline{S_k}\right]\ D_1$

- Diversificación $= \sum_k C_k - SCR = \left(tVaR\left[\sum_k S_k\right] - \sum_k tVaR\left[S_k\right] \right) D_1 + \ldots$

Diversificación

- Cualquiera partición de riesgos $R_P = \sum_{k \in P} S_k$

$$RTC = \sum_k S_k = \sum_P R_P$$

$$= (S_1 + S_2 + S_3) + (S_4 + S_5) + \cdots$$

$$= R_1 + R_2 + \cdots$$

- Capital standalone $C_P = - tVaR\left[R_P - \overline{R_P}\right] D_1$

- Diversificación $= \sum_P C_P - SCR = \left(tVaR\left[\sum_P R_P\right] - \sum_P tVaR\left[R_P\right] \right) D_1 + \ldots$

RTC
- RISK COMPONENTS

aggregation
- RISK COMPONENTS

SCR
- RISK COMPONENTS

Margen de riesgo

- Posibilidad: run-off al final del horizonte de 1 año

- Precio de la cartera = $RTC(T=1) - MVM$

- MVM = Market Value Margin
  = coste del riesgo del run-off

$$MVM \quad D_1 \quad = \quad CoC \sum_{t=1}^{\infty} C_t \quad D_t$$

coste del capital = spread sobre el rfr = 6%

flujo del riesgo non-transferible

descuento

- ¿Como calcular C_t?

- Sugerencia FINMA: $C_t = C_0 \dfrac{p_t}{p_0}$

patrón de run-off de las provisiones

???

capital standalone del riesgo non-transferible

MVM

Agenda

- Solvencia
- RTC
- SCR
- Usos y Abusos

Ejercicios

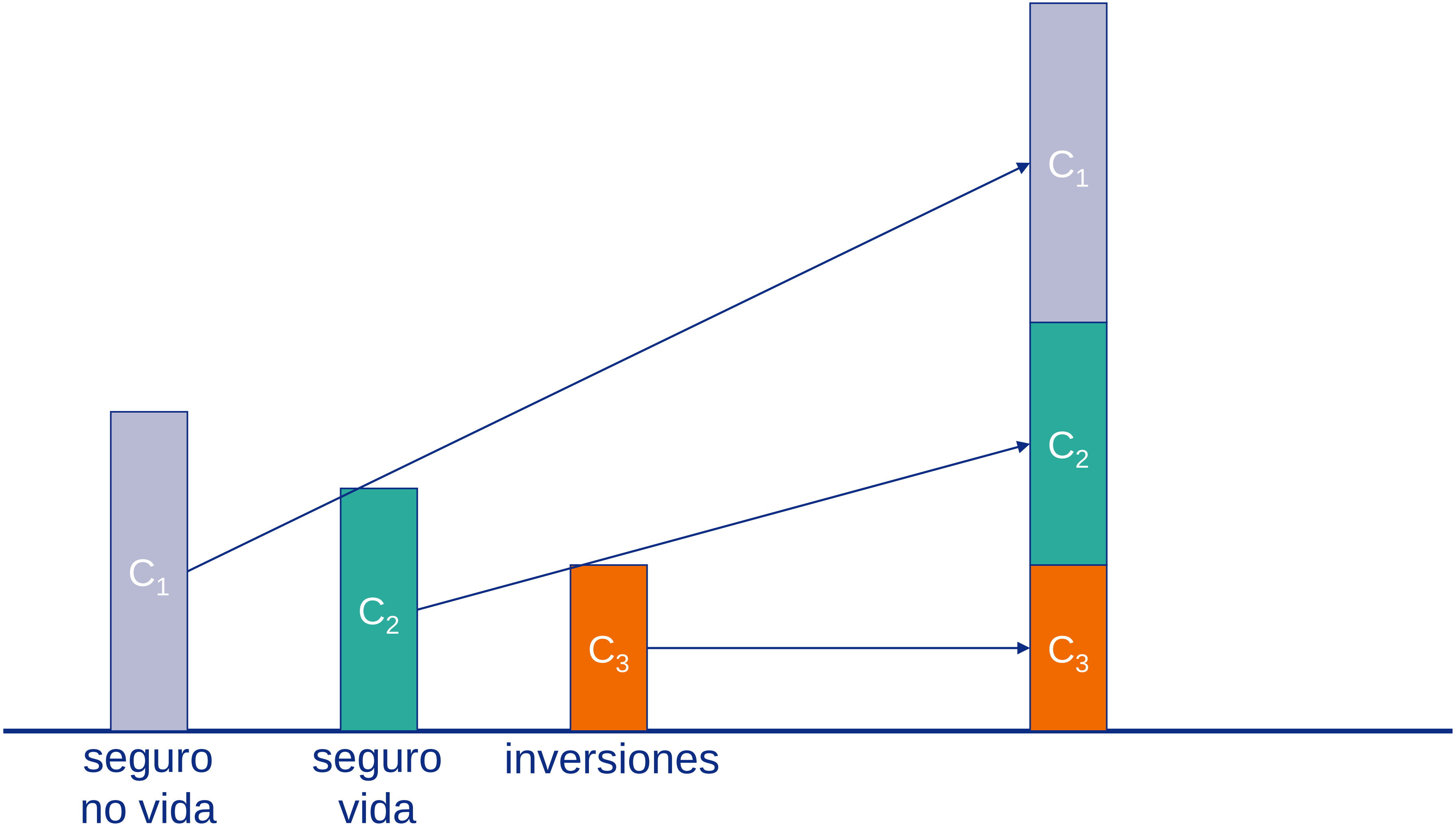
Riesgo	Acción	Observación
Inv 1 & Inv 2	Ignora la dependencia	• capitales standalone • SCR
LoB 2	Ignora el riesgo sistemático	• capitales standalone • SCR
LoB 3	Elimina la limite de suscripción	• capitales standalone
LoB 4	Baja la mortalidad	• capitales standalone • SCR & RTC
LoB 1	Cede 50%	• capitales standalone • diversificación • SCR
Inflación	Ignora la inflación Añade un escenario de inflación	• capitales standalone • SCR & RTC
Interés	Ignora la tasa de interés	• capitales standalone • SCR & RTC

use test
- cockpit

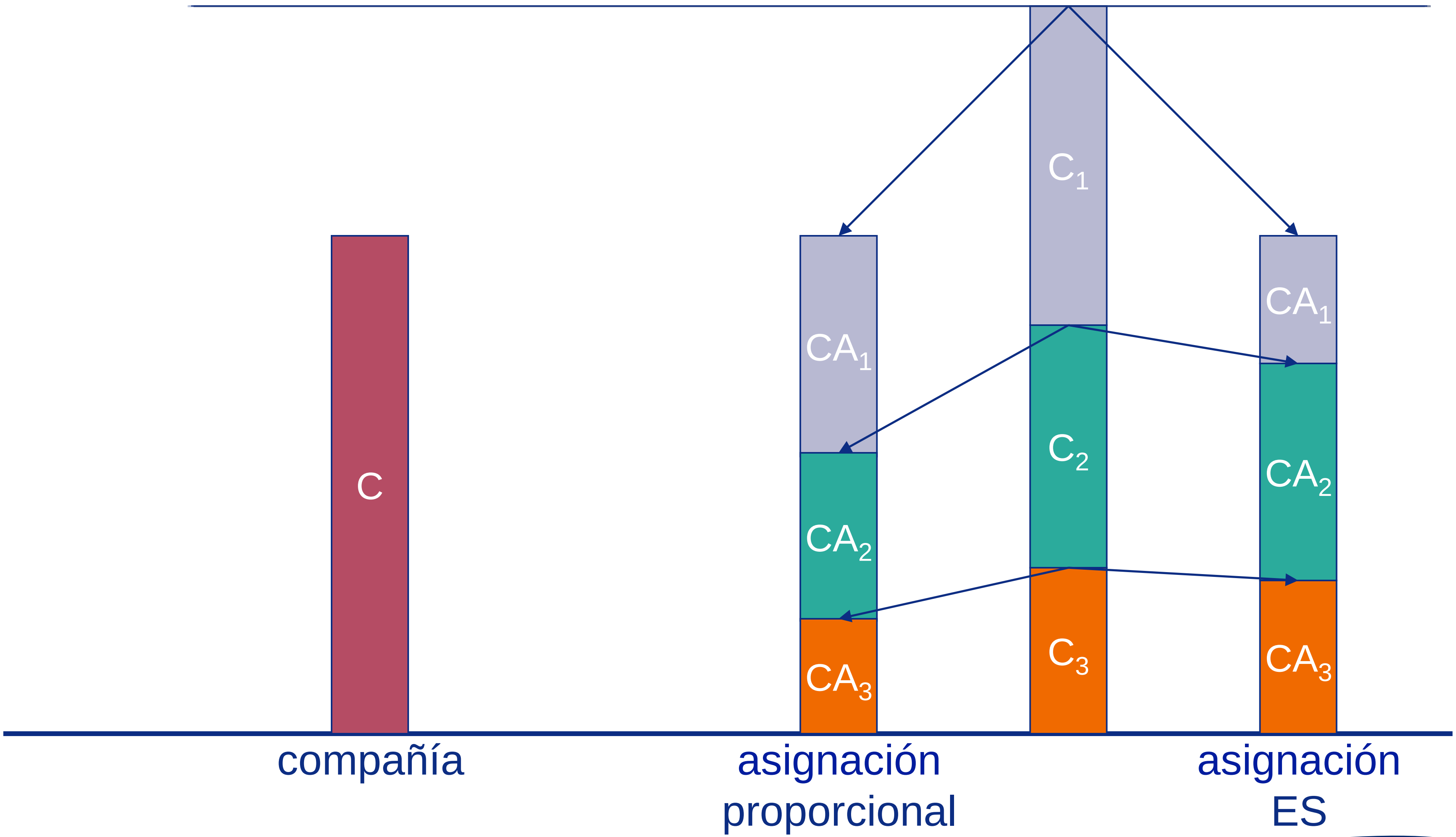
Usos posibles del modelo

- Gestión de cartera
- Optimización del reaseguro
- Asignación de capital
- ALM
- Tarificación
- Limites de suscripción
- Desarrollo de productos
- M&A
- Incentivos y remuneración
- …

Asignación de capital



Asignación de capital



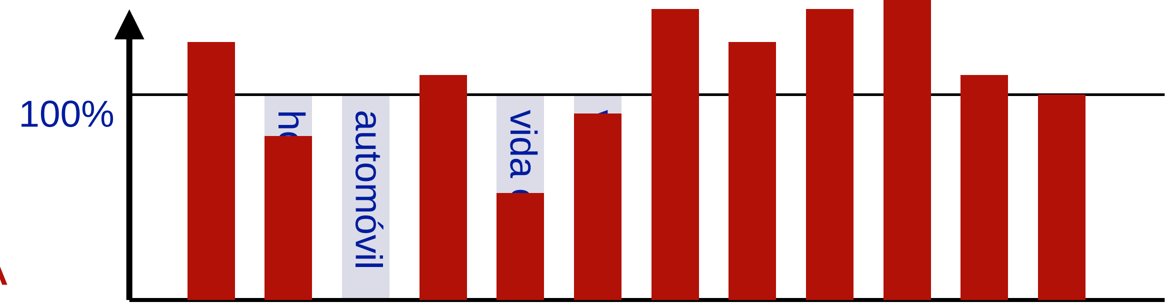
Asignación de capital

	proporcional	…	expected shortfall
fórmula	$AC_P = \frac{C_P}{\sum_Q C_Q} \cdot C$		$C_P = \left(\overline{R_P} - E\left[R_P \middle\vert R_P \le VaR_\varepsilon(R_P)\right]\right)D_1$ $C = \left(\overline{RTC} - E\left[RTC \middle\vert RTC \le VaR_\varepsilon(RTC)\right]\right)D_1$ $AC_P = \left(\overline{R_P} - E\left[R_P \middle\vert RTC \le VaR_\varepsilon(RTC)\right]\right)D_1$
equidad	✓	✓ / ✗	✓
diversificación	✗	✓ / ✗	✓
simplicidad	✓✓✓	✓ / ✗	✓
comunicación	✓	✓ / ✗	✗

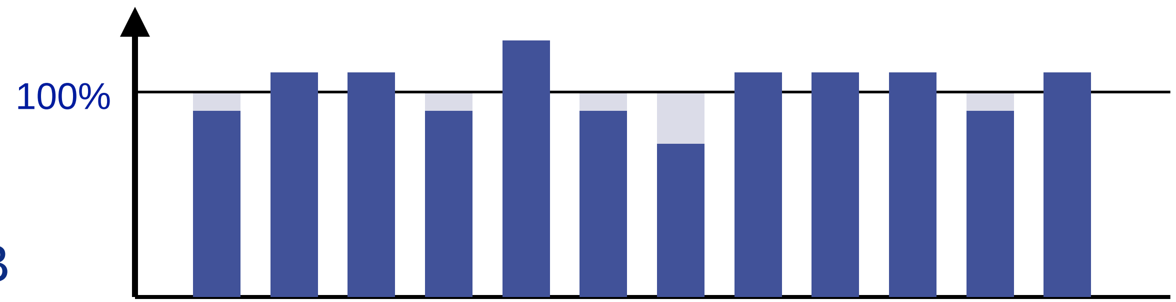
Gestión de cartera

cartera hoy

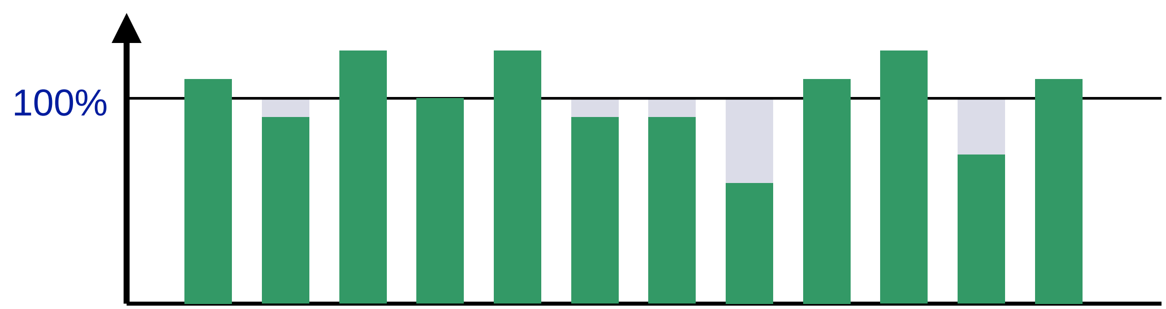
estrategia A



estrategia B

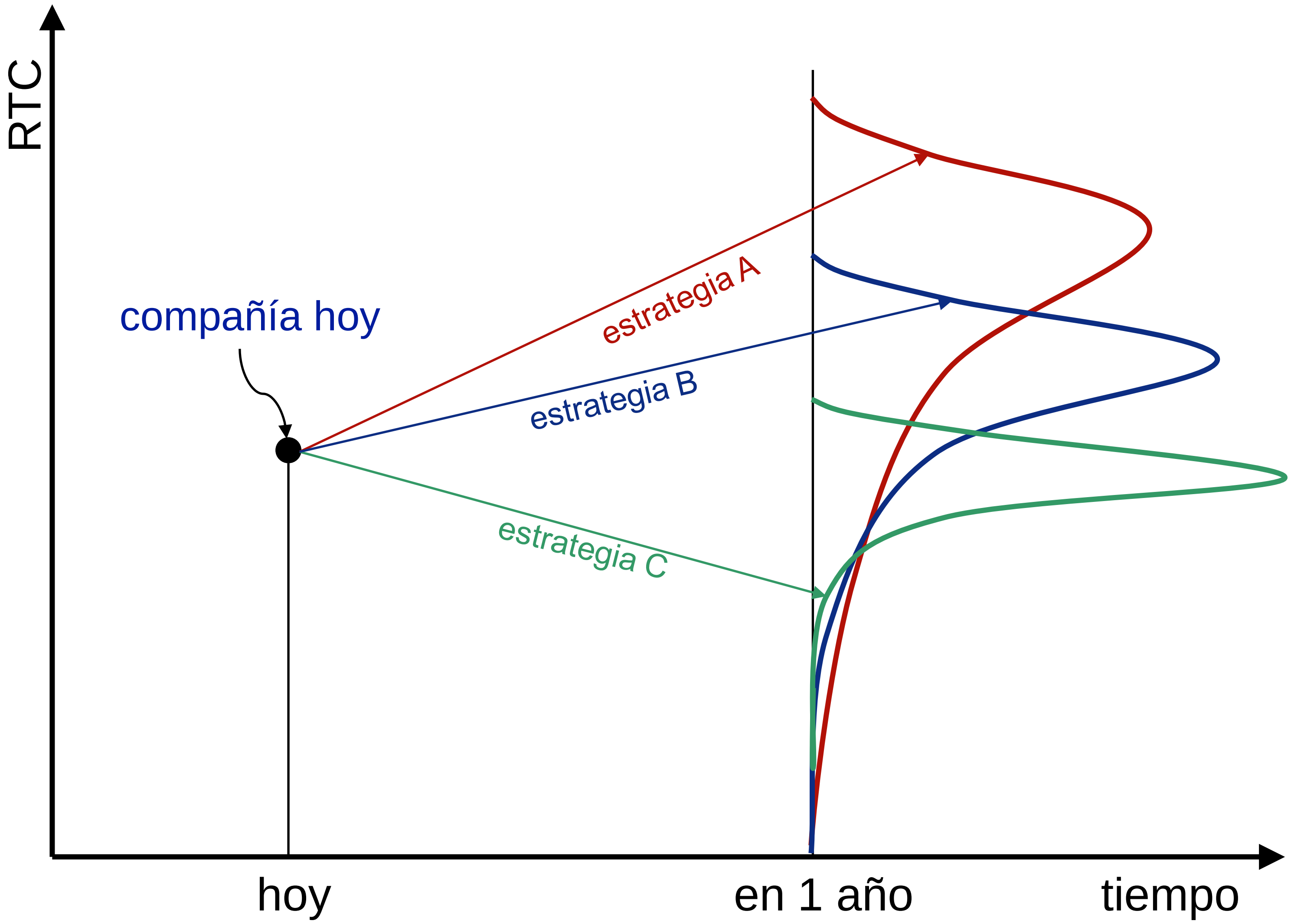


estrategia C

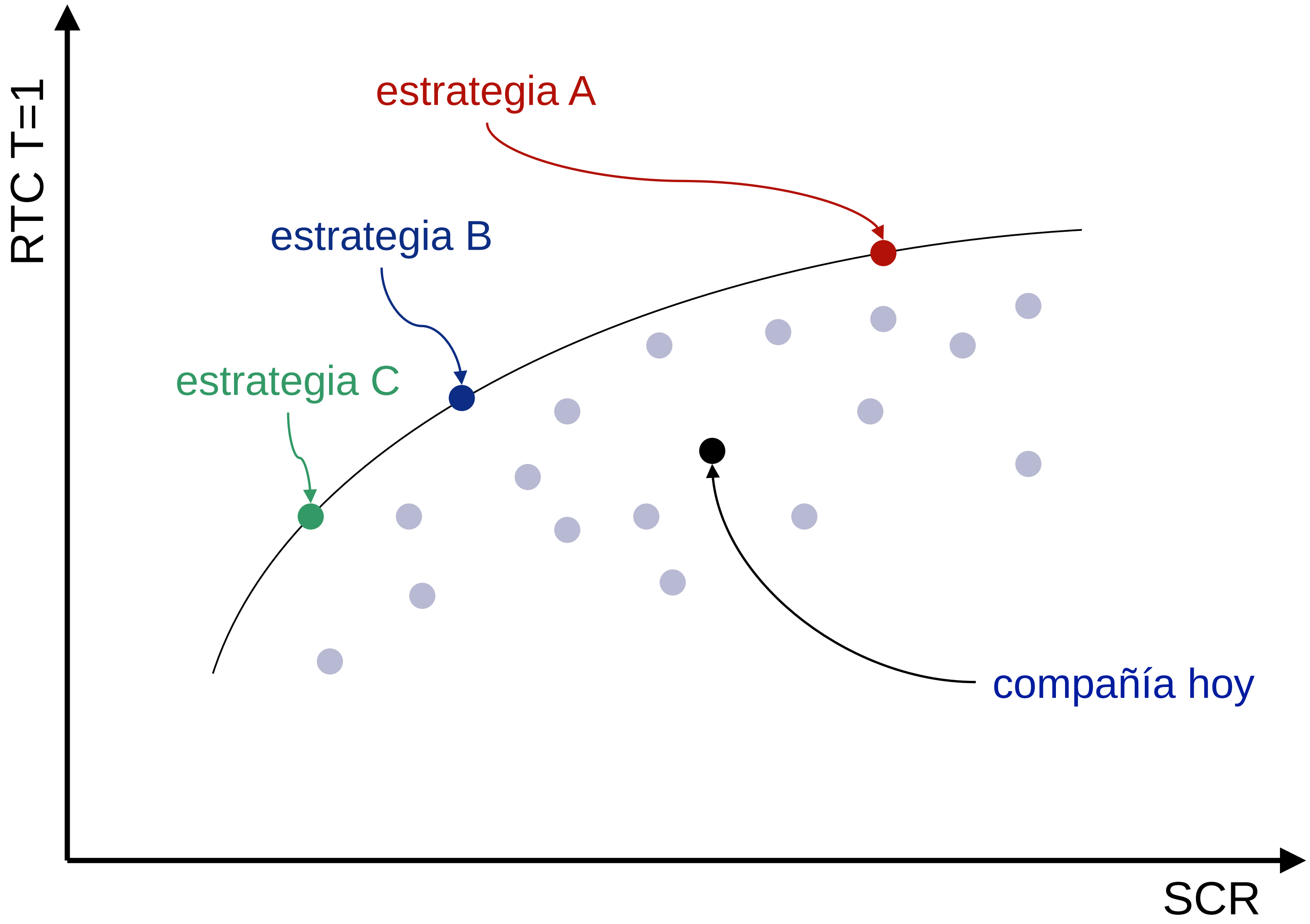


use_test
- cockpit

Gestión de cartera



Gestión de cartera



use_test
• scanner

Ejercicios

Riesgo	Acción	Observación
LoB 1 & LoB 2	Escanea la composición	• gráfico de araña
QS	Escanea la cesión	• gráfico de araña
XL	Escanea el limite & deducible	• gráfico de nube
SL	Escanea el limite & deducible	• gráfico de nube

use_test
- scanner

Lo de que no hemos tratado

- CRTI
- Modelos de
  - riesgo operacional
  - crédito
  - catástrofes
  - bienes inmuebles
  - hipotecas
  - tasas
- Siniestros largos
  - cola larga
  - separación de los de masa
  - reaseguro de provisiones
- Vida
  - opciones & garantías
  - policyholder behaviour
- Muchas otras técnicas
  - control variates
  - cartera replicadora
  - ESG
  - ...
- Plataformas & arquitectura
- Modelo de datos
- Buen gobierno
- Validación

Limitaciones

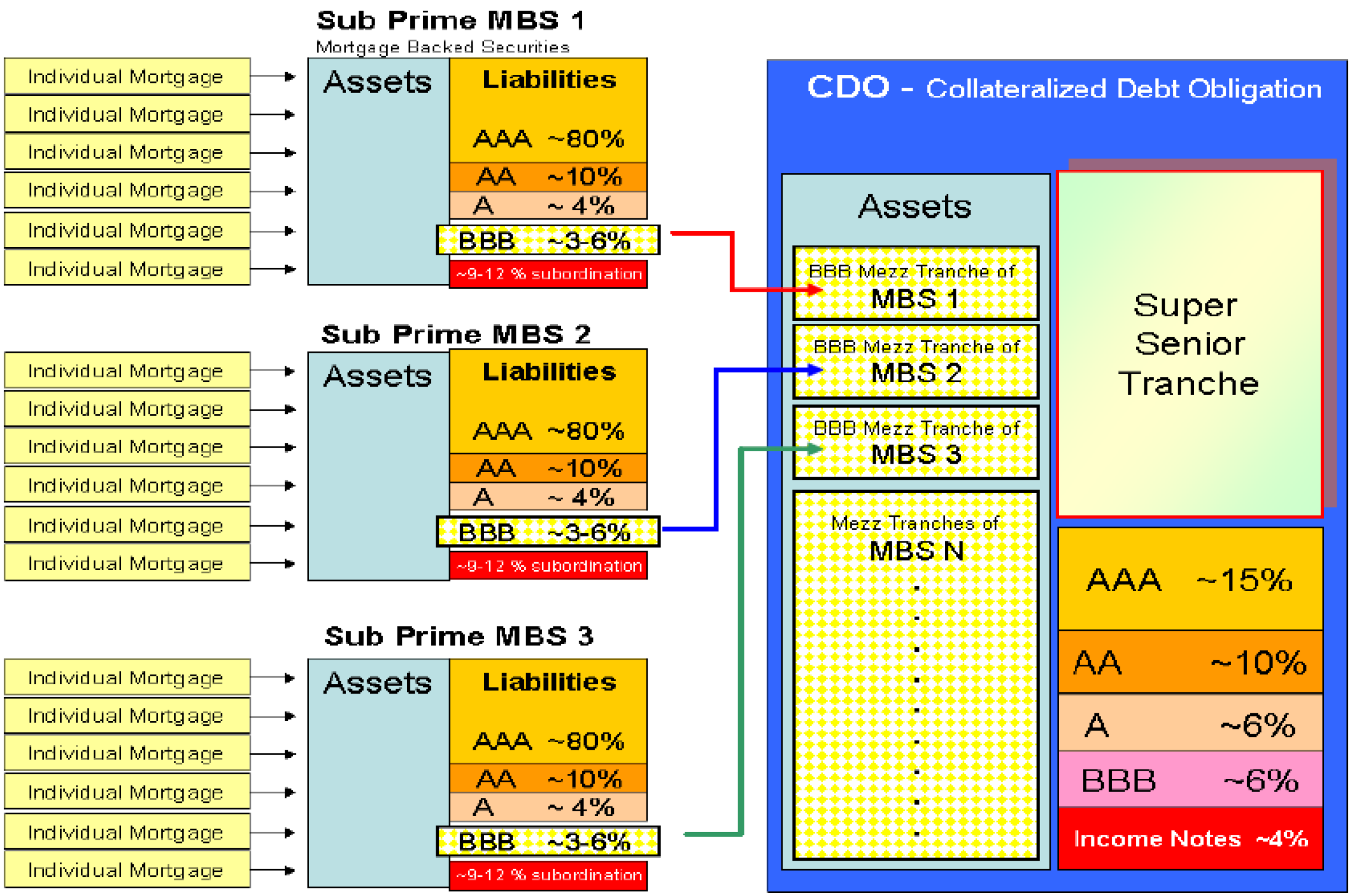
Modelo Excel

- ordenación de listas largas (> 1’000 componentes)
- aumentar numero de líneas o columnas
- algoritmos con entrelazos
- conexión abancos de datos
- buen gobierno (1 cambio → varias celdas afectadas)
- usuarios múltiples

Modelos en general

- no reducen empresa a cifras
  - ⇒ nunca mas sabios que suscriptores experimentados
- a menudo modelan ruido
- hay más que una solución
  - ⇒ las cifras no se comparan
  - ⇒ ingeniería actuarial
- el mundo cambia
  - ⇒ modelos deben adaptarse
- no predicen el futuro
- no modelan más que … lo que modelan

Modelos o confianza?



Agenda

- Solvencia
- RTC
- SCR
- Usos y Abusos

Conclusion

Modelos Internos de Riesgo, Capital y Solvencia son una oportunidad

- para entender y manejar vuestro negocio
- para fomentar la función actuarial

Vuestro ponente

- Formación de
  - ingeniero nuclear
  - físico teórico
  - actuario
- Carrera profesional de
  - investigador
  - actuario
  - ejecutivo
  - asesor
- 30 años de experiencia en
  - modelación de sistemas complejos
  - validación de modelos
  - ingeniería actuarial
    - tarificación
    - provisiones
    - Nat Cat
    - modelos de riesgo, capital y solvencia
- Socio de una consultoría de seguros
  - todas las funciones nucleas
  - solo expertos

Frank Cuypers

+41 (41) 725 32 94

frank.cuypers@prs-zug.com

Coordenadas del ponente

Frank Cuypers

+41 (41) 725 32 94

frank.cuypers@prs-zug.com